

Uso da Simulação de Monte Carlo e da Curva de Gatilho na Avaliação de Opções de Venda Americanas

Javier Gutiérrez Castro †
Tara K. Nanda Baidya †
Fernando A. Lucena Aiube †

† Departamento de Engenharia Industrial (DEI)
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Rua Marquês de São Vicente 225, C.E.P. 22453-900 – Gávea,
Rio de Janeiro, Brasil.
javiergc@aluno.puc-rio.br
baidya@ind.puc-rio.br
aiube@ind.puc-rio.br

Abstract

In 1973 Black and Scholes [2] published their article on the valuation of European option. Since then, there have been many works extending this work in many directions. One such direction is the valuation of American options. On the matter, no exact analytical formula has been developed yet. In stead, numerical methods have been used in their valuations. Monte Carlo simulation has been the method which has become more and more popular among researchers in this field.

The threshold curve method, used by Grant, Vora and Weeks [7] to value American options, is calculated through Monte Carlo simulation. This is the traditional method used in finance. We propose to modify the methodology of Ibáñez and Zapatero [9], which also uses the threshold curve, to obtain a more efficient and more accurate method than that of Grant, Vora and Weeks [7]. In this work, the described procedures and numerical tests are focused in American Put Options.

Resumo

Em 1973 Black e Sholes [2] publicaram um seminal artigo no qual, pela primeira vez, se avaliava analiticamente uma opção do tipo européia. Desde então, tem surgido uma grande quantidade de trabalhos estendendo esse artigo para diversas áreas e aplicações. O apreçamento de opções americanas é uma das vertentes. Sobre isso, não existe até o momento uma fórmula analítica que permita calcular de maneira exata o preço de uma opção americana. Portanto, métodos numéricos vêm sendo utilizados nesta tarefa. Entre eles, o método da simulação de Monte Carlo tem se tornado o de maior popularidade entre os pesquisadores dessa área.

A curva de gatilho, método utilizado por Grant, Vora e Weeks [7] para avaliar opções americanas, é calculada através da simulação de Monte Carlo. Este é o método tradicional utilizado em Finanças. Nossa proposta consiste em modificar a metodologia desenvolvida por Ibáñez e Zapatero [9], que também calcula a curva de gatilho, para obter um método mais eficiente e mais preciso do que o apresentado por Grant, Vora e Weeks [7]. Neste trabalho, os procedimentos descritos e os testes numéricos realizados, foram orientados para opções de venda americanas.

Keywords: American Put Options, Monte Carlo Simulation, Threshold Curve.

Title: Utilization of Monte Carlo Simulation and Threshold Curve to Value American Put Options.

1 Introdução

Em 1973 Black e Scholes [2] apresentaram um artigo seminal em que foi apreçada analiticamente uma opção financeira do tipo europeia. Até então, este era um grande desafio para os pesquisadores nessa área. Mas, no caso de opções americanas, não existe nenhum procedimento analítico que permite avaliá-las com exatidão. Inicialmente a literatura propôs métodos que aproximam analiticamente o valor da opção americana, como é o caso de Barone-Adesi e Whaley [1]. Por outro lado, o método binomial, utilizado por Cox, Ross e Rubinstein [5] para avaliar opções europeias, resulta também útil no apreçamento de opções americanas. Mas todos esses procedimentos têm a desvantagem de ficarem restringidos a uma série de condições, tais como ter no máximo uma variável estocástica e o ativo subjacente ser modelado por um processo estocástico de Movimento Geométrico Browniano. Estas restrições inviabilizam sua aplicação em problemas complexos.

Em relação à técnica de simulação de Monte Carlo, existe um histórico relativamente recente no que diz respeito à sua utilização no apreçamento de opções americanas. As primeiras abordagens propostas foram realizadas por Boyle et al. [3] e Broadie e Glasserman [4], tornando-se referências para os trabalhos que posteriormente desenvolveram-se nessa área de pesquisa. Estas metodologias tentam aproximar o preço da opção usando os conceitos da programação dinâmica, isto é, utilizando procedimentos recursivos de cálculo (de trás para frente) a partir de simulações dos valores do ativo subjacente ao longo do tempo.

Neste contexto, um método que tem tido uma ampla difusão devido a sua facilidade de aplicação é o desenvolvido por Grant, Vora e Weeks [7]. Este método tem a particularidade de calcular previamente a curva de gatilho (*threshold curve*) ou curva de preços críticos de exercício, sendo uma das primeiras metodologias que introduziram este conceito no apreçamento de opções americanas por simulação.

A determinação dos instantes ótimos de exercício da opção (ou preços críticos de exercício), ao longo de todo o período de maturação, define o que na literatura se conhece como curva de gatilho. A curva de gatilho é um conceito bastante útil, sobretudo quando são analisadas opções reais. O tratamento de opções reais é análogo ao de opções financeiras, em que o ativo subjacente passa a ser um ativo real, por exemplo, o valor de um projeto. Assim, é possível por meio desta curva identificar o período adequado para realizar um investimento de valor K (preço de exercício). Este investimento ocorrerá quando o valor do projeto atinja um nível igual ou superior àquele definido na curva. Caso exista a possibilidade de abandonar o projeto (obtendo um valor de recuperação K), a opção de abandono deverá ser exercida assim que o valor do projeto seja igual ou inferior àquele definido na curva. Estes são alguns exemplos da utilidade prática da curva de gatilho.

As opções financeiras ou reais do tipo americana podem ser exercidas ao longo do intervalo de tempo que vai de $t_0 = 0$, até $t_N = T$ (tempo de maturidade). O prazo até a maturidade ou vencimento é dividido em N intervalos, sendo que a opção pode ser exercida em qualquer um desses intervalos. Ao utilizar a simulação de Monte Carlo, a modelagem da opção americana assemelha-se a uma opção bermuda, a qual se caracteriza por ter mais de uma data de exercício até o vencimento. Quanto mais intervalos discretos forem considerados no intervalo $[t_0; T]$, melhor será o modelo que descreve o comportamento real de uma opção americana (que se exerce em tempo contínuo e não discreto).

Uma metodologia alternativa é a desenvolvida por Ibáñez e Zapatero [9]. Como feito por Grant, Vora e Weeks [7], eles também determinam primeiramente a curva de gatilho.

A novidade que trazem os autores é uma maneira diferente de calcular os preços críticos de exercício, o que se mostra muito eficiente.

Neste artigo é analisado com especial ênfase o algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9]. Por outro lado, foram feitas modificações nesse algoritmo que aprimoram a construção da curva de gatilho. Isto permitiu melhorar a precisão dos resultados usando os testes originais propostos pelos autores. O enfoque dado no trabalho está na avaliação de opções de venda americanas considerando que o ativo subjacente é a única variável estocástica. São comparadas três metodologias: o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [7], Ibáñez e Zapatero [9] e Ibáñez e Zapatero modificado (aqui proposto).

O artigo está assim organizado: a seção 2 descreve o algoritmo desenvolvido por Grant, Vora e Weeks [7] aplicando-o a uma série de testes numéricos; a seção 3 apresenta o algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9]; a seção 4 aplica o algoritmo descrito na seção 3 aos mesmos testes numéricos da seção 1, detalhando as modificações que serão realizadas na implementação do algoritmo; a seção 5 compara os resultados obtidos com as diferentes metodologias; e a seção 6 apresenta as conclusões e considerações finais.

2 O Método de Grant, Vora e Weeks

2.1 Definição de Curva de Gatilho

O algoritmo de Grant, Vora e Weeks [7] determina primeiramente a curva de gatilho ou fronteira de exercício ótima. Esta é formada pelo conjunto de pontos S_t^* nos quais o valor de manter viva a opção (esperar) é igual ao valor intrínseco (exercer), onde S_t é o valor do ativo subjacente, que é uma variável estocástica, e o sobrescrito * indica que S_t é o preço crítico de exercício no instante t .

Denote-se por $P_t(S_t, K)$ o preço da opção de venda, e $I(S_t, K) = K - S_t$ é o valor intrínseco ou valor da opção de venda quando é exercida, sendo K o preço de exercício. Portanto, na curva de gatilho se dá que $P_t(S_t^*, K) = I(S_t^*, K)$.

Dado um instante inicial t_0 , e um instante T (maturidade da opção ou prazo máximo de exercício), pode-se subdividir o horizonte de tempo $T - t_0$ em N intervalos, com datas de exercício discretas em $\{t_1, t_2, \dots, t_N = T\}$. Em algum instante de tempo t_n , assume-se que o exercício da opção é ótimo se $S_{t_n} \leq S_{t_n}^*$.

Seja r a taxa livre de risco de curto prazo, e Q a medida de probabilidade martingale. Logo, em alguma data t_n ($n \in \{N-1, N-2, \dots, 1\}$), o preço da opção é calculado por:

$$P_{t_n}(S_{t_n}, K) = E_{t_n}^Q [e^{-\int_{t_n}^{\tau^*} r_t dt} I(S_{\tau^*}, K)] \quad (1)$$

Onde $\tau^* \in \{t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, T\}$ é o chamado tempo ótimo de parada, definido como o primeiro t_{n+i} no qual $S_{t_{n+i}} \leq S_{t_{n+i}}^*$; noutro caso $\tau^* = \infty$. Em outras palavras, é o primeiro instante em que o preço do ativo "S" fica abaixo da curva de gatilho.

Assumindo que S_t segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), sob a medida martingale, escreve-se: $dS_t/S_t = \alpha dt + \sigma dZ$, onde $\alpha = r - q$ é o *drift* ou tendência neutra ao risco, q é a taxa de dividendos, σ é a volatilidade do preço do ativo, e, $dZ = \varepsilon_t(dt)^{1/2}$ é o incremento do processo padrão de Wiener com $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$. Dado que S_{t_n} é uma variável estocástica a ser gerada por simulação de Monte Carlo, é conveniente utilizar um MGB discretizado, da seguinte forma:

$$S_{t_n+\Delta t} = S_{t_n} \exp [(\alpha-\sigma^2 / 2)\Delta t + \sigma (\Delta t)^{1/2} \varepsilon_{t_n+\Delta t}] \quad (2)$$

Onde Δt é o intervalo de tempo entre t_n e t_{n+1} . Desta maneira, é possível discretizar a equação (1) sob a mesma medida de probabilidade, resultando na seguinte equação:

$$P_{t_n}(S_{t_n}, K) = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^A e^{-(\tau_a^*-t_n)r} (K - S_{\tau_a^*}^*) \quad (3)$$

Onde A é o número total de caminhos Brownianos, dentre os M simulados a partir de um instante de tempo t_n , nos quais num instante de tempo (o primeiro) t_{n+i} tem-se $S_{t_{n+i}} \leq S_{\tau_a^*}^*$ (podem existir caminhos que em nenhum t_{n+i} aconteça tal situação). Por conseqüência existem “ A ” períodos τ_a^* , identificados por τ_a^* ($a=1, \dots, A$) correspondentes a um determinado $S_{\tau_a^*}^*$ em que a mencionada restrição é satisfeita.

2.2 Descrição do algoritmo de Grant, Vora e Weeks

O método de Grant, Vora e Weeks [7] foi um dos primeiros em utilizar o conceito de curva de gatilho, e serviu de base para o algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9], que será abordado posteriormente. Nascimento [10] apresenta de forma bastante ampla esta metodologia, inclusive com diversas experimentações numéricas.

Para calcular os preços críticos de exercício, o algoritmo utiliza a condição de valor ótimo (*value matching condition*). A condição é ilustrada a seguir para uma opção de venda americana P_t sobre um ativo base S_t e com preço de exercício K :

$$P_t(S_t^*, K) = K - S_t^* \quad (4)$$

Onde S_t^* representa o preço crítico de exercício do ativo base no instante t . Na maturidade da opção, o valor crítico é dado pelo preço de exercício K :

$$P_t(S_T, K) = \max(K - S_T, 0) \Rightarrow S_T^* = K \quad (5)$$

No instante de tempo $t=T$, o preço crítico de exercício S_t^* é igual ao preço de exercício da opção, representado pela letra K . Por definição, o preço da opção de compra é a diferença entre o preço do ativo S_t e o preço de exercício K (ou seja $S_t - K$). Para a opção de venda temos $K - S_t$. Se no tempo $t=T$ (último período para decidir o exercício) S_t é igual a K , o valor da opção seria zero, portanto, exercer ou não a opção forneceria o mesmo resultado (zero para essa data). Assim, o preço crítico de exercício S_T^* é igual a K .

Na equação (5), T é a data de vencimento da opção. Já para um instante t qualquer antes do vencimento, a decisão ótima depende do conhecimento prévio do preço crítico imediatamente posterior no futuro, $S_{t+\Delta t}^*$, como pode ser visto a seguir:

$$P_t(S_t^*, K) = \max(K - S_t^*, e^{-r\Delta t} E_t[P_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t}^*, K)]) \quad (6)$$

Onde o último termo à direita constitui o valor de continuação, ou o valor de manter a opção viva. E_t é o valor esperado condicional à informação disponível no instante t e Δt é o tamanho de uma discretização do tempo.

A dificuldade surge quando são calculados os preços críticos que dependem de preços futuros. Como a informação futura é desconhecida no instante atual, utiliza-se a simulação de Monte Carlo como auxílio no cálculo destes valores.

Para ilustrar o processo de cálculo do preço crítico de exercício, supõe-se que o valor a ser determinado é $S_{T-\Delta t}^*$, ou seja, o preço crítico de exercício do instante imediatamente anterior ao vencimento da opção. Primeiramente, adota-se como condição inicial $S_{T-\Delta t} = S_T$. A partir de $S_{T-\Delta t}$, simula-se valores para S_T e P_T . Obtém-se então o valor de P_T , utilizando-se a média das simulações executadas. A seguir, verifica-se se $S_{T-\Delta t}^*$ satisfaz a condição de valor ótimo dada pela equação (6), o que significaria escrever:

$$K - S_{T-\Delta t}^* = e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t}[P_T(S_T^*, K)] \quad (7)$$

Caso a condição acima não seja satisfeita, incrementa-se $S_{T-\Delta t}$ de um valor $-\Delta S$ (um valor pequeno) e simula-se novamente valores para S_T e P_T , repetindo-se o procedimento até que o valor crítico $S_{T-\Delta t}^*$ seja encontrado. A curva de gatilho é obtida repetindo-se o procedimento acima, recursivamente, até o instante inicial.

2.3 Resumo do Algoritmo de Grant, Vora e Weeks

O algoritmo Grant, Vora e Weeks [7], para o cálculo do preço de uma opção de venda americana, pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Discretiza-se a vida útil da opção em $N=T/\Delta t$ partes, onde Δt é o tamanho de cada intervalo, e adota-se a condição terminal $S_T^* = K$.

2. No instante $T-\Delta t$, adota-se como aproximação de $S_{T-\Delta t}$ um valor igual ou próximo de S_T^* . Em seguida, utiliza-se a simulação de Monte Carlo para se obter diferentes valores de S_T e, conseqüentemente, de P_T . O valor de P_T é calculado através da média das simulações executadas.

3. Verifica-se se a condição de valor ótimo, expressa pela equação (7), é satisfeita. Caso afirmativo, inicia-se o próximo passo. Caso contrário, incrementa-se $S_{T-\Delta t}$ de um valor $-\Delta S$ e repete-se o passo anterior.

4. Repete-se o segundo e o terceiro passos para os instantes anteriores, até chegar a t_0 . Para calcular o preço da opção de venda devem-se simular caminhos em todos os instantes posteriores ao momento avaliado, e aplicando a equação (3), obtém-se esse valor.

5. Uma vez obtida a curva de gatilho, o preço da opção de venda é obtido através da aplicação da equação (3), a partir de simulações do preço do ativo subjacente. Detalhando passo a passo, faz-se:

- (i) Simular uma grande quantidade de caminhos (M) a partir do valor inicial do ativo subjacente $S_{t_0} = S_0$. As simulações são feitas em intervalos de tempos discretos $\{t_1, t_2, \dots, t_N = T\}$.

- (ii) Para cada caminho simulado, no primeiro instante de tempo t_n ($n = 1, 2, \dots, N$) em que o valor do ativo S_{t_n} seja menor ou igual ao ponto crítico da curva de gatilho $S_{t_n}^{(*)}$, será exercida a opção, sendo o preço da opção de venda em t_n o valor intrínseco: $K - S_{t_n}$. A seguir, desconta-se este preço com a taxa livre de risco: $P_m = e^{-(t_n-t_0)r} \cdot (K - S_{t_n})$, onde P_m ($m \in \{1, 2, \dots, M\}$) representa o preço da opção de venda em t_0 para um caminho simulado dentre as 'M' realizações. É provável que existam caminhos nos quais, em todo momento, os preços fiquem acima da curva de gatilho; para estes casos $P_m = 0$, naturalmente.
- (iii) O preço da opção de venda será a média aritmética de todos os P_m 's:

$$P_{t_0}(S_0, K) = 1/M \sum_{m=1}^M P_m \quad (8)$$

A Figura 1 apresenta um exemplo ilustrativo que calcula o preço de uma opção de venda com três caminhos simulados a partir de um preço inicial do ativo $S_0 = 35$, em um horizonte de tempo dividido em seis períodos.

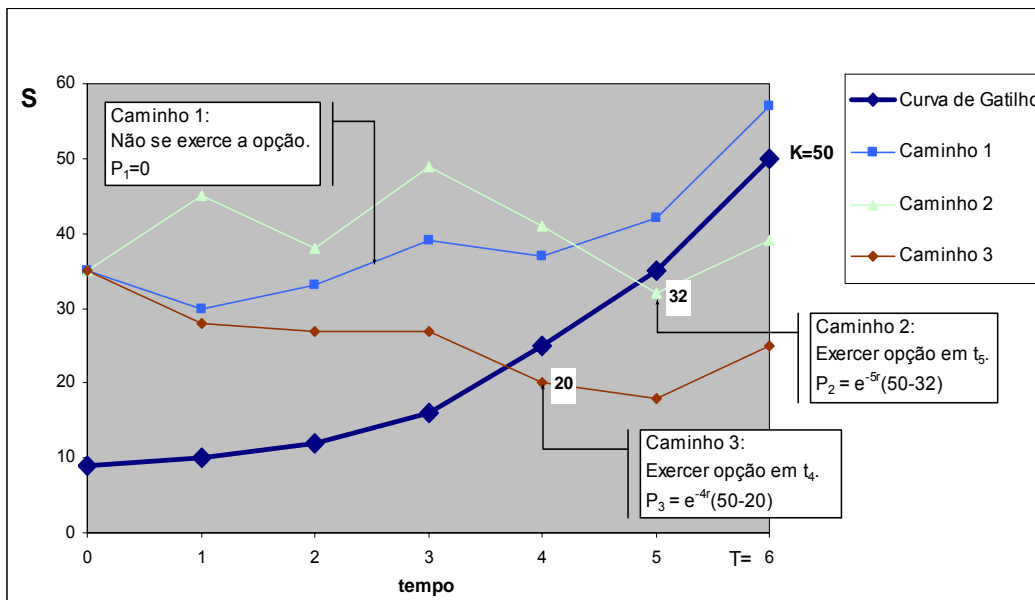


Figura 1: Exemplo de Cálculo do Preço da Opção de Venda. Faz-se a média aritmética dos três P_m 's. $P_0(S_0 = 35, K = 50) = (0 + e^{-5r}(50 - 32) + e^{-4r}(50 - 20))/3$.

2.4 Testes Numéricos com o algoritmo de Grant, Vora e Weeks

Para testar a metodologia de Grant, Vora e Weeks [7] consideraram-se testes numéricos com os mesmos parâmetros dos realizados por Huang, Subrahmanyam e Yu [6], que utilizaram o método binomial, e cujos resultados são usados como *benchmark*.

Dado que esse algoritmo não especifica claramente o valor que os incrementos $-\Delta S$ devem ter, estipulou-se um valor muito pequeno igual a 0,01 (na seção 3 será visto este valor se fez igual ao erro ξ utilizado no passo 5 do algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9], só para uniformizar o erro de convergência). Foram empregadas 100.000 simulações para o cálculo da curva de gatilho a cada tentativa de encontrar os preços críticos de exercício e outras 100.000 para o preço do ativo subjacente que permite calcular o preço da opção de

venda tendo já tracejada a curva de gatilho. Repete-se esta última etapa 50 vezes, com o fim de obter um preço médio da opção e um desvio padrão. Na Tabela 1 exibem-se os resultados.

A seguir são apresentadas as explicações referentes à Tabela 1:

- O número de datas de exercício refere-se à quantidade de intervalos discretos em que o espaço de tempo compreendido entre $t_0=0$ e $t_N = T$ foi subdividido. Foram consideradas 5 e 25 datas de exercício para efeitos de comparar com os resultados obtidos por Ibáñez e Zapatero [9], os quais fizeram os testes somente com essas datas.
- Para exemplificar, o primeiro teste numérico tem como parâmetros $K=35$, $\sigma=20\%$ ao ano, $T=1$ mês (0,0833 anos). O preço médio da opção de venda calculado pelo algoritmo de Grant, Vora e Weeks modificado (com 5 datas de exercício) resultou no mesmo valor do benchmark, com um desvio padrão de 0,0002.
- A coluna “% diferença” mede a porcentagem, em valor absoluto, em que o preço da opção de venda calculado por meio das simulações se distancia do valor verdadeiro. Sua fórmula é: $|\text{Preço Opção de Venda} - \text{Opção de Venda Verdadeira}| / (\text{Opção de Venda Verdadeira})$.

Tabela 1: Resultados do Preço da Opção de Venda aplicando o algoritmo Grant, Vora e Weeks ($S_0 = 40$; $r = 0,0488$; $q = 0$)

K	σ	T (anos)	Opção de Venda Verdadeira*	5 datas de exercício			25 datas de exercício			
				Preço Opção de Venda	Desvio Padrão	% diferença	Preço Opção de Venda	Desvio Padrão	% diferença	
35	0,2	0,0833	0,0062	0,0062	0,0002	0,00%	0,0061	0,0002	1,61%	
35	0,2	0,5833	0,4328	0,4270	0,0031	1,34%	0,4300	0,0032	0,65%	
40	0,2	0,0833	0,8522	0,8485	0,0024	0,43%	0,8499	0,0022	0,27%	
40	0,2	0,5833	1,9904	1,9643	0,0056	1,31%	1,9841	0,0040	0,32%	
45	0,2	0,0833	5,0000	4,9654	0,0009	0,69%	4,9927	0,0001	0,15%	
45	0,2	0,5833	5,2670	5,2077	0,0066	1,13%	5,2559	0,0063	0,21%	
35	0,4	0,0833	0,2466	0,2463	0,0026	0,12%	0,2457	0,0026	0,36%	
35	0,4	0,5833	2,1549	2,1382	0,0084	0,77%	2,1496	0,0091	0,25%	
40	0,4	0,0833	1,7681	1,7645	0,0049	0,20%	1,7651	0,0038	0,17%	
40	0,4	0,5833	4,3526	4,3240	0,0066	0,66%	4,3457	0,0086	0,16%	
45	0,4	0,0833	5,2868	5,2781	0,0055	0,16%	5,2781	0,0055	0,16%	
45	0,4	0,5833	7,3830	7,3415	0,0089	0,56%	7,3733	0,0079	0,13%	
				MAPE	0,6156%					
				RMSE	2,6379%		MAPE	0,3698%		
							RMSE	0,6355%		

* Os preços verdadeiros da opção de venda americana em cada teste numérico (12 em total) são os obtidos por Huang, Subrahmanyam e Yu [8] usando um modelo binomial com 10.000 passos. Estes resultados servem como *benchmark* para o cálculo das medidas de erro: MAPE e RMSE.

- O **MAPE** é uma medida estatística do erro para um conjunto de testes. No total foram realizados 12 testes numéricos (um em cada linha da Tabela 1). Em cada teste a “% de diferença” varia. Portanto, uma maneira de consolidar uma medida de erro para um conjunto de testes realizados sob certos parâmetros comuns e um determinado número de datas de exercício, é por meio desta medida. Numericamente, o MAPE é a média aritmética da coluna “% diferença” (explicada no parágrafo anterior).
- O **RMSE** é outra medida estatística do erro de um conjunto de testes, que para o caso de 12 testes sua fórmula seria: $RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} (\text{Preço Put}_i - \text{Put Verdadeira}_i)^2 / 12}$. Em outras palavras, é a raiz quadrada do erro médio quadrático.

- Chame-se de “experimento” ao conjunto de testes numéricos realizados sob uma certa quantidade de datas de exercício. Por exemplo, a Tabela 1 exhibe dois experimentos, os quais agrupam 12 diferentes testes numéricos. Em cada experimento o conjunto de testes numéricos são os mesmos, só varia o valor do parâmetro “número de datas de exercício”.
- Quanto menor for a porcentagem nestas medidas de erro, melhor será a aproximação para os valores de referência ou *benchmarks*. Nos experimentos apresentados na Tabela 1 nota-se que um maior número de datas de exercício (esta é a variável que muda de um experimento para outro) faz que os valores do MAPE e do RMSE sejam reduzidos.

3 O algoritmo de Ibáñez e Zapatero

A seguir será descrita a metodologia de Ibáñez e Zapatero [9] para o cálculo do preço de opções americanas via Simulação de Monte Carlo, e que também utiliza o conceito de curva de gatilho.

3.1 Determinar a fronteira de exercício ótima um período antes da maturidade

Dado que o preço crítico de exercício no instante de tempo $t_N=T$ ($S_{t_N}^*$) é igual a K (como explicado na seção 2.2), o trabalho então, concentra-se em calcular recursivamente os outros pontos da curva de gatilho. Inicia-se então pelo preço crítico de exercício no período t_{N-1} .

Passo 1: Deseja-se achar o ponto $S_{t_{N-1}}^*$. Começa-se com um ponto inicial $S_{t_{N-1}}^{(1)}$ escolhido arbitrariamente. Normalmente toma-se este valor igual ao preço de exercício K .

Passo 2: Depois, calcula-se o preço da opção: $P_{t_{N-1}}(S_{t_{N-1}}^{(1)}, K)$ em t_{N-1} , aplicando para isso a simulação de Monte Carlo conforme a equação (3). Por outro lado, e só no instante t_{N-1} , seria também possível empregar a conhecida fórmula de Black e Scholes [2], visto que entre t_{N-1} e t_N existe um só período. Assim, tomando como valor inicial do ativo $S_{t_{N-1}}^{(1)}$ e o preço de exercício K em t_N , calcula-se o preço da opção de venda com a exatidão que fornece esta fórmula, sem ser necessário (neste particular caso) realizar as simulações.

Passo 3: Para encontrar um novo preço $S_{t_{N-1}}^{(2)}$ que se aproxime mais do $S_{t_{N-1}}^*$, é necessário encontrar uma regra eficiente para ir de um ponto de aproximação a outro. Uma forma bastante rápida para convergir ao preço crítico de exercício é utilizar o método de aproximações sucessivas de Newton. A convexidade da função preço da opção garante a convergência até o ponto fixado $S_{t_{N-1}}^*$. Assim:

Para $s = 1, 2, 3, \dots, *$, usa-se a aproximação:

$$P_{t_{N-1}}(S_{t_{N-1}}^{(s)}, K) + P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)}) \cdot (S_{t_{N-1}}^{(s+1)} - S_{t_{N-1}}^{(s)}) = I(S_{t_{N-1}}^{(s+1)}, K) \quad (9)$$

onde $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)}) = \frac{\partial P(S_{t_{N-1}}^{(s)}, K)}{\partial S}$. Reorganizando a equação (9) encontra-se o valor $S_{t_{N-1}}^{(s+1)}$:

$$S_{t_{N-1}}^{(s+1)} = \left(K - P_{t_{N-1}}(S_{t_{N-1}}^{(s)}, K) + P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)}) S_{t_{N-1}}^{(s)} \right) \div \left(1 + P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)}) \right) \quad (10)$$

Para resolver a equação (10) deve-se calcular antes $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)})$, que é a principal dificuldade na aplicação do método de Newton.

O cálculo analítico de $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)})$ para uma opção de venda americana, a cada iteração ‘s’, não é possível (só em opções europeias existe expressão analítica para $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)})$). É um fato amplamente conhecido na literatura de Finanças que à medida que S_{t_n} (ne $\{N-1, N-2, \dots, 1\}$) se aproxima mais do preço crítico de exercício $S_{t_n}^*$, a derivada se inclina mais tendendo a -1. Por esta razão, Ibáñez e Zapatero [9] sugerem inicializar as iterações com um valor $P_S(S_{t_{N-1}}^{(1)}) = -0.60$, e gradativamente realizar incrementos (negativos) a cada iteração até um máximo de $P_S(S_{t_{N-1}}^{(*)}) = -0.90$.

Passo 4: Achado $S_{t_{N-1}}^{(2)}$ calcula-se o preço da opção $P_{t_{N-1}}(S_{t_{N-1}}^{(2)}, K)$, aplicando a equação (3), ou a equação de Black e Scholes (lembrado que esta só serve no período t_{N-1}). Após, calcula-se uma nova aproximação $S_{t_{N-1}}^{(3)}$ usando a equação (10).

Passo 5: Repete-se o procedimento ‘s’ vezes até convergir ao valor $S_{t_{N-1}}^{(*)} = S_{t_{N-1}}^{(s)}$, sendo que $|S_{t_{N-1}}^{(s)} - S_{t_{N-1}}^{(s-1)}| < \xi$, para algum número ξ muito pequeno.

A convergência para o ponto fixado $S_{t_{N-1}}^{(*)}$ se realiza de maneira monotônica, isto é, para uma opção de venda tem-se que: $S_{t_{N-1}}^{(1)} > S_{t_{N-1}}^{(2)} > \dots > S_{t_{N-1}}^{(*)}$. As iterações finalizam quando se encontra $S_{t_{N-1}}^{(s-1)} - S_{t_{N-1}}^{(s)} < \xi$ ou quando exista uma mudança no sinal da convergência: $S_{t_{N-1}}^{(s)} > S_{t_{N-1}}^{(s-1)}$. Em qualquer dos dois casos estima-se o ponto médio das duas últimas iterações: $\hat{S}_{t_{N-1}}^{(*)} = (S_{t_{N-1}}^{(s)} + S_{t_{N-1}}^{(s-1)})/2$, sendo esta a estimativa do valor de $S_{t_{N-1}}^{(*)}$.

3.2 Determinar a fronteira de exercício ótima um período antes da maturidade

Seguidamente, repete-se o mesmo procedimento para os pontos $t_{N-2}, t_{N-1}, \dots, t_0$ (de maneira recursiva). A cada ponto, sugere-se reiniciar o algoritmo tomando como preço inicial do ativo $S_{t_n}^{(1)} = S_{t_{n+1}}^{(*)}$ (o ponto fixado do período à frente, calculado previamente).

Assim, no final encontra-se um conjunto de pontos $S^{(*)} = \{S_{t_0}^{(*)}, S_{t_1}^{(*)}, \dots, S_{t_{N-1}}^{(*)}, S_{t_N=T}^{(*)}\}$, que formam a fronteira de exercício ótima ou curva de gatilho: $S_{t_n}^{(*)} = \hat{F}_{t_n}(t_n)$. Uma maneira eficiente de achar a função \hat{F}_{t_n} é fazendo uma regressão quadrática ou cúbica do conjunto $S^{(*)}$ com os tempos $\{t_0, t_1, \dots, T\}$, embora resulte também aceitável fazer uma simples interpolação entre dois períodos discretos.

A utilidade da curva de gatilho está no fato que, no primeiro instante de tempo em que o valor do ativo subjacente “S” fique abaixo desta curva, dever-se-á optar pelo exercício, sendo o preço da opção de venda em algum instante t_n o valor intrínseco: $K - S_{t_n}$.

3.3 Determinar a fronteira de exercício ótima um período antes da maturidade

Uma vez traçada a curva de gatilho, para calcular o preço da opção de venda, ao igual que em Grant, Vora e Weeks [7] (seção 2.3), aplica-se a equação (3) a partir de simulações do ativo subjacente.

4 O algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado

Nesta seção apresentamos uma proposta de aprimoramento do algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9]. Posteriormente realizamos os experimentos numéricos.

4.1 Aprimoramento no cálculo da curva de gatilho

A primeira melhoria que se pode efetuar no cálculo do ponto $S_{t_{N-1}}^{(*)}$ é empregar a fórmula de Black e Scholes [2] para calcular o preço exato da opção de venda nos passos 2 e 4 do algoritmo, dado que existe um único período até a maturidade da opção. Ibáñez e Zapatero [9] também fazem esta sugestão. A novidade estaria no passo 3, onde deve ser estimado $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)})$. Quando existe só um período até a maturidade da opção, o valor da derivada do preço da opção com relação ao preço do ativo subjacente é calculado por uma expressão analítica fechada proveniente da fórmula de Black e Scholes [2] dada por:

$$P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)}) = e^{-q(T-t_{N-1})} [N(d_1) - 1] \quad (11)$$

onde:

$$d_1 = \left[\ln\left(\frac{S_{t_{N-1}}^{(s)}}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_{N-1}) \right] \frac{1}{\sigma\sqrt{T - t_{N-1}}}$$

$N(\cdot)$ = função distribuição normal padrão acumulada.

q = taxa de dividendos.

r = taxa de desconto livre de risco.

K = preço de exercício.

σ = volatilidade do preço do ativo subjacente.

Portanto, no passo 3 do algoritmo, referente ao período t_{N-1} é conveniente usar a expressão analítica exata de $P_S(S_{t_{N-1}}^{(s)})$. Isto permitirá uma melhor convergência para o ponto $S_{t_{N-1}}^{(*)}$.

Ibáñez e Zapatero [9] sugerem aplicar o algoritmo em duas etapas para obter um melhor cálculo da curva de gatilho nos períodos $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_0$. Seguindo esta sugestão, no algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado também se aplicam as duas etapas nos mesmos períodos com exceção do ponto fixado no período t_{N-1} , que já foi calculado empregando valores analíticos exatos do preço da opção de venda e da sua derivada. A seguir se explica cada etapa.

(i) Primeira etapa

Determinar uma curva de gatilho simulando uma quantidade não muito grande de caminhos Brownianos aleatórios, por exemplo, 5.000, a cada vez que se utilize a equação (3) nos passos 2 e 4. Para efeitos de redução de variância, as 5.000 simulações devem estar constituídas por 2.500 simulações mais seus respectivos valores antitéticos.

Variável antitética é uma das principais e mais simples técnicas para reduzir variância. Consiste em gerar uma variável estocástica negativamente correlacionada à variável de estado do ativo objeto. Assim, cada trajetória deve ser associada a um par de seqüências, isto é, duas trajetórias negativamente correlacionadas. Para maior informação sugere-se consultar Frota [6].

Melhoria proposta: No passo 3 do algoritmo, Ibáñez e Zapatero [9] não fornecem maiores detalhes de como fazer os acréscimos de $P_S(S_{t_n}^{(s)})$ a cada iteração. Eles sugerem começar com um valor $P_S(S_{t_{N-1}}^{(1)}) = -0.60$, e depois fazer incrementos (negativos) a cada iteração até um valor máximo de $P_S(S_{t_{N-1}}^{(*)}) = -0.90$. Mas, que valores devem ter tais incrementos?

A curva de gatilho a ser calculada nesta etapa é uma primeira tentativa de aproximar os preços críticos $\{S_{t_0}^{(*)}, S_{t_1}^{(*)}, \dots, S_{t_{N-3}}^{(*)}, S_{t_{N-2}}^{(*)}\}$, assim, observou-se através de diversos experimentos numéricos, que uma maneira rápida de achar a convergência é realizando acréscimos de $-0,05$ ($-\Delta = -0,05$) começando com um valor de $P_S(S_{t_n}^{(1)}) = -0,60$. De acordo com as experimentações realizadas, na terceira ou quarta iteração já encontra-se o preço crítico de exercício, com um erro $\xi = 0,01$ (erro de convergência descrito no passo 5 do algoritmo, que é do mesmo valor considerado por Ibáñez e Zapatero [9] nos testes que realizaram).

(ii) Segunda etapa

Os preços críticos de exercício achados na primeira etapa, servirão de ponto de partida $S_{t_n}^{(1)}$ a cada t_n ($n = \{0, 1, \dots, N-2\}$) em um novo cálculo da curva de gatilho. Assim, $S_{t_n}^{(1)}$ da etapa 2 é igual a $S_{t_n}^{(*)}$ da etapa 1. Estes pontos iniciais estão muito mais próximos do verdadeiro valor $S_{t_n}^{(*)}$, e conseqüentemente $P_S(S_{t_n}^{(s)})$ se aproxima mais de -1 . Portanto, ao aplicar novamente o algoritmo espera-se obter uma melhor aproximação da curva de gatilho.

Para melhorar ainda mais a precisão, foram simulados 100.000 caminhos Brownianos aleatórios (50.000 mais seus respectivos valores antitéticos) a cada vez que se utilize a equação (3) nos passos 2 e 4.

Melhoria proposta: Nesta etapa, Ibáñez e Zapatero [9] não falam como fazer os acréscimos em $P_S(S_{t_n}^{(s)})$. Então, visto que os pontos iniciais encontram-se muito próximos dos preços críticos de exercício, diversos testes práticos efetuados indicam que, começando as iterações com um $P_S(S_{t_n}^{(1)}) = -0,85$ e fazendo posteriormente incrementos ($-\Delta$) pequenos de $-0,01$, consegue-se uma boa aproximação. No máximo em 10 iterações encontrar-se-á o novo preço crítico de exercício, considerando um erro $\xi = 0,01$.

4.2 Experimentos utilizando o algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado

Ibáñez e Zapatero [9] fizeram testes numéricos com os mesmos parâmetros dos realizados por Huang, Subrahmanyam e Yu [6], que utilizaram o método binomial, e cujos resultados são usados como *benchmark*. O algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado também replica esses testes e logo ambas as metodologias são comparadas.

Na Tabela 2 são exibidos doze testes numéricos nos quais é calculado o preço da opção de venda americana. Os parâmetros comuns são os seguintes: $r = 0,0488$ anual; $q=0$. Aplicam-se as duas etapas (como foram descritas) na determinação da curva de gatilho. Uma vez obtida a curva, para calcular o preço da opção de venda simulam-se 100.000 caminhos Brownianos (50.000 com seus valores antitéticos) a partir do preço inicial do ativo $S_0 = 40$. Simulam-se estes caminhos 50 vezes (sob a mesma curva de gatilho calculada previamente), e o preço da opção de venda provém da média aritmética do preço da opção obtido a cada vez em que se realizaram as 100.000 simulações de caminhos.

Tabela 2: Resultados do algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado ($S_0 = 40$; $r = 0,0488$; $q = 0$)

K	σ	T (anos)	Opção de Venda Verdadeira*	5 datas de exercício			25 datas de exercício		
				Preço Opção de Venda	Desvio Padrão	% diferença	Preço Opção de Venda	Desvio Padrão	% diferença
35	0,2	0,0833	0,0062	0,0062	0,0003	0,00%	0,0062	0,0002	0,00%
35	0,2	0,5833	0,4328	0,4263	0,0035	1,50%	0,4315	0,0038	0,30%
40	0,2	0,0833	0,8522	0,8487	0,0023	0,41%	0,8512	0,0019	0,12%
40	0,2	0,5833	1,9904	1,9654	0,0046	1,26%	1,9851	0,0050	0,27%
45	0,2	0,0833	5,0000	4,9659	0,0011	0,68%	4,9927	0,0002	0,15%
45	0,2	0,5833	5,2670	5,2076	0,0053	1,13%	5,2562	0,0058	0,21%
35	0,4	0,0833	0,2466	0,2465	0,0027	0,04%	0,2467	0,0026	0,04%
35	0,4	0,5833	2,1549	2,1408	0,0075	0,65%	2,1528	0,0089	0,10%
40	0,4	0,0833	1,7681	1,7654	0,0040	0,15%	1,7676	0,0046	0,03%
40	0,4	0,5833	4,3526	4,3243	0,0093	0,65%	4,3477	0,0084	0,11%
45	0,4	0,0833	5,2868	5,2791	0,0054	0,15%	5,2853	0,0045	0,03%
45	0,4	0,5833	7,3830	7,3406	0,0090	0,57%	7,3748	0,0094	0,11%
				MAPE	0,5997%		MAPE	0,1211%	
				RMSE	2,6196%		RMSE	0,4991%	

* Os preços verdadeiros da opção de venda americana em cada teste numérico (12 em total) são os obtidos por Huang, Subrahmanyam e Yu [8] usando um modelo binomial com 10.000 passos. Estes resultados servem como *benchmark* para o cálculo das medidas de erro: MAPE e RMSE.

4.3 Comparação dos resultados em Ibáñez e Zapatero (I&Z) e I&Z modificado

Nesta seção se realiza uma comparação baseada nos resultados das medidas de erro entre os algoritmos de Ibáñez e Zapatero [9] e Ibáñez e Zapatero modificado, sendo que em ambos os casos são considerados os testes numéricos da Tabela 2. Na Tabela 3, são exibidos tais resultados.

Tabela 3: Medidas de erro: Ibáñez e Zapatero (I&Z) versus I & Z Modificado

Algoritmo utilizado	5 datas de exercício		25 datas de exercício	
	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
Ibáñez e Zapatero (I & Z)*	1,0818%	2,7295%	0,6151%	0,9567%
I & Z Modificado**	0,5997%	2,6196%	0,1211%	0,4991%

Fonte: * Elaboração própria a partir dos resultados obtidos por I&Z.

** Resultados provenientes da Tabela 2.

Observa-se na Tabela 3, que o algoritmo I&Z modificado gera menores erros em ambas as datas de exercício. Desta maneira, verifica-se que as modificações realizadas no algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9] foram apropriadas. Esta melhora na precisão dos resultados é devido ao aprimoramento realizado na determinação da curva de gatilho. Na estimação do ponto crítico de exercício do penúltimo período, por exemplo, ao invés de simular caminhos entre uma iteração e outra até atingir o preço crítico de exercício, emprega-se a fórmula de Black e Scholes [2], e, além disso, ao utilizar as aproximações sucessivas de Newton usou-se a fórmula analítica da derivada da opção. Por outro lado, na estimação dos outros pontos críticos de exercício, o fato de que em cada uma das duas etapas de aplicação do algoritmo ter sido utilizado diferentes valores iniciais da derivada e dos acréscimos (passo 3 do algoritmo), contribuiu também para obter uma melhor aproximação.

4.4 Análise de sensibilidade do algoritmo de I&Z modificado

Nesta seção são realizadas análises de sensibilidade de certos parâmetros, como o número de datas de exercício, o número de simulações para obter o preço da opção e o cálculo de uma curva de gatilho média. A seguir detalham-se estas experimentações.

4.4.1. Número de Datas de Exercício

Na Tabela 3, observa-se que o número de datas de exercício melhora a precisão dos resultados, obtendo menores valores para os erros.

Foram realizados experimentos adicionais alterando-se o valor desta variável. Os testes numéricos são sempre os exibidos na Tabela 2, mantendo os mesmos parâmetros para o cálculo da curva de gatilho e para o cálculo do preço da opção de venda. Os resultados dessas experimentações são exibidos a seguir na Figura 2.

De acordo com a Figura 2, nota-se que existe uma significativa redução das medidas de erro à medida que o número de datas de exercício vai crescendo até um valor aproximado de 25. A partir daí a redução das medidas de erro continua, mas já não é tão significativo o ganho obtido pelo acréscimo de maior quantidade de datas.

O tempo de processamento computacional cresce à medida que se incrementa o número de datas de exercício. A Figura 3 exibe os tempos médios despendidos no cálculo do preço da opção de venda americana num teste numérico, em função do número de datas de exercício.

Em relação ao tempo de processamento computacional nota-se uma significativa elevação à medida que o número de datas de exercício aumenta. Observa-se que, o tempo médio que se leva em computar um teste numérico com 25 datas de exercício é de 65,16 segundos (1 minuto aprox.), mas ao se dobrar o número de datas de exercício (50 datas) o tempo de processamento sobe para 185,40 segundos (3 minutos aproximadamente). O ganho na melhora do erro de passar de 25 para 50 datas talvez não justifique o custo computacional.

O programa que computou os diferentes testes numéricos foi desenvolvido em MatLab, rodado em um computador Pentium IV de 2,8 GHz e 480 MB de RAM.

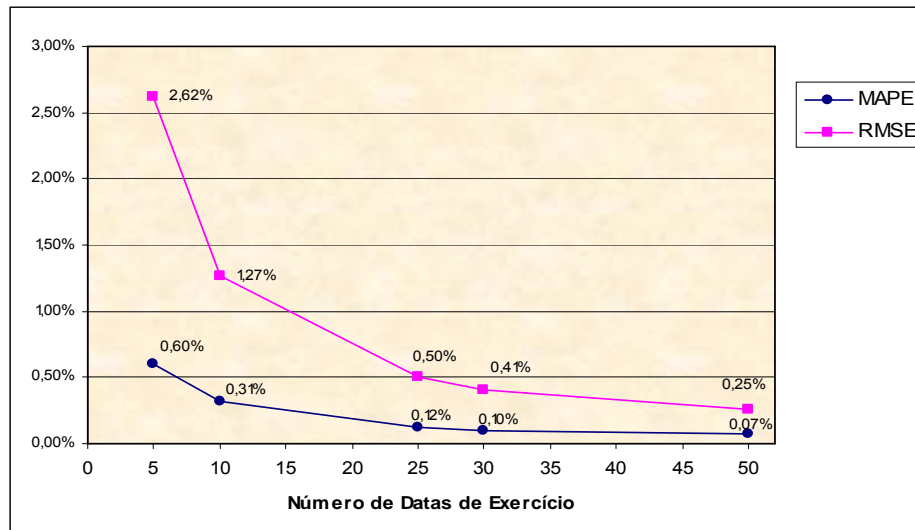


Figura 2: Valor das medidas de erro em função do número de datas de exercício

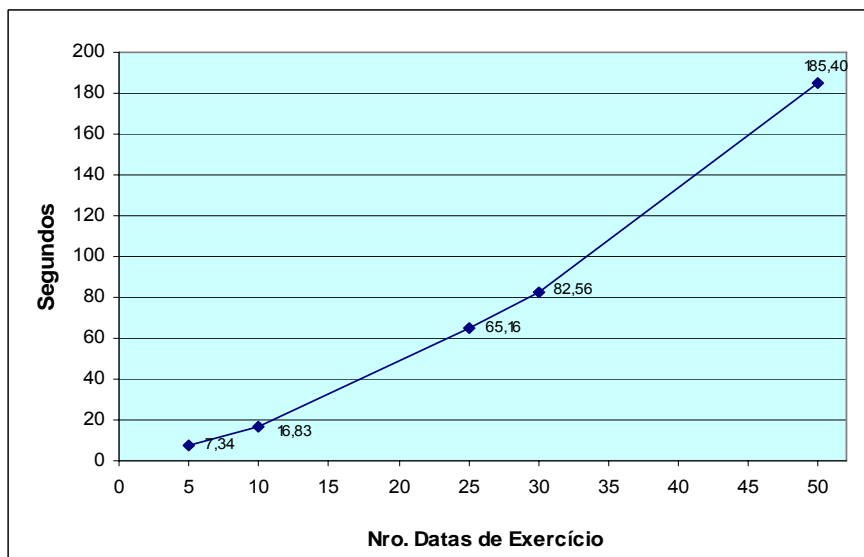


Figura 3: Tempo computacional em função do número de datas de exercício

4.4.2. Outras Análises de Sensibilidade

Foram realizados experimentos numéricos para analisar o comportamento de algumas variáveis, por exemplo, o número de simulações de caminhos Brownianos do preço do ativo subjacente, que permite calcular o preço da opção de venda americana uma vez que se tenha determinado a curva de gatilho. Dividindo o tempo até a maturidade em 25 datas de exercício, constatou-se que a partir de 10.000 simulações consegue-se uma estabilidade nas medidas de erro MAPE e RMSE, e, em relação ao tempo de processamento computacional, existe uma diferença de poucos segundos entre o que se consome com 10.000 e 100.000 simulações. No entanto, optou-se por fazer os testes com

100.000 simulações, pois Ibáñez e Zapatero [9] utilizaram essa quantidade de simulações. Desta forma, e para efeitos de comparação, manteve-se o mesmo valor do parâmetro.

Adicionalmente realizou-se um experimento para analisar se a média de várias curvas de gatilho melhoraria a precisão dos resultados. Os resultados mostraram que o fato de calcular várias curvas de gatilho e com estas se obter uma curva média (tirando a média dos valores dos preços críticos de exercício em cada instante de tempo), não implicou em uma melhora nas medidas de erro. Conclui-se então que basta calcular uma única curva aplicando sempre as duas etapas descritas. A média de várias curvas de gatilho resultou ser desnecessária aumentando exponencialmente o tempo de processamento computacional.

5 Análise dos resultados e comparações das metodologias testadas

Apresenta-se na Figura 4 um resumo das medidas de erro para os três algoritmos testados, sendo que o tempo até a maturidade foi dividido em 25 datas de exercício, o que mostrou ser uma quantidade razoável para conseguir uma boa precisão nos resultados. Nota-se que o algoritmo I&Z modificado ofereceu as menores medidas de erro.

No que diz respeito ao tempo de processamento computacional (ver Figura 5) os algoritmos de Ibáñez e Zapatero [9] e Ibáñez e Zapatero modificado empregam tempos bastante similares, mas o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [7] demanda um tempo muito maior, isto porque não existe uma regra específica que acelere a convergência para os pontos críticos de exercício. Sempre utiliza-se o mesmo valor $-\Delta S$ e conseqüentemente em determinados períodos são requeridas muitas iterações até aproximar o ponto crítico.

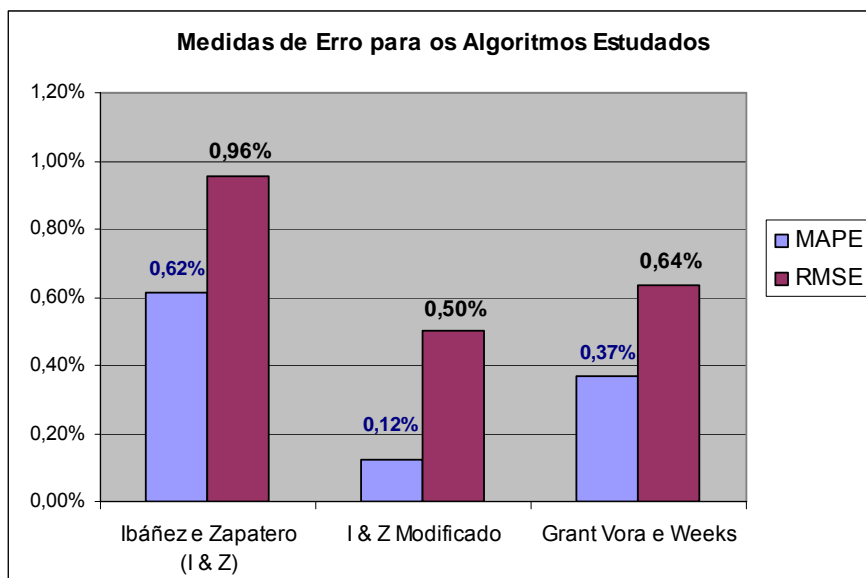


Figura 4: Medidas de Erro nos três algoritmos abordados

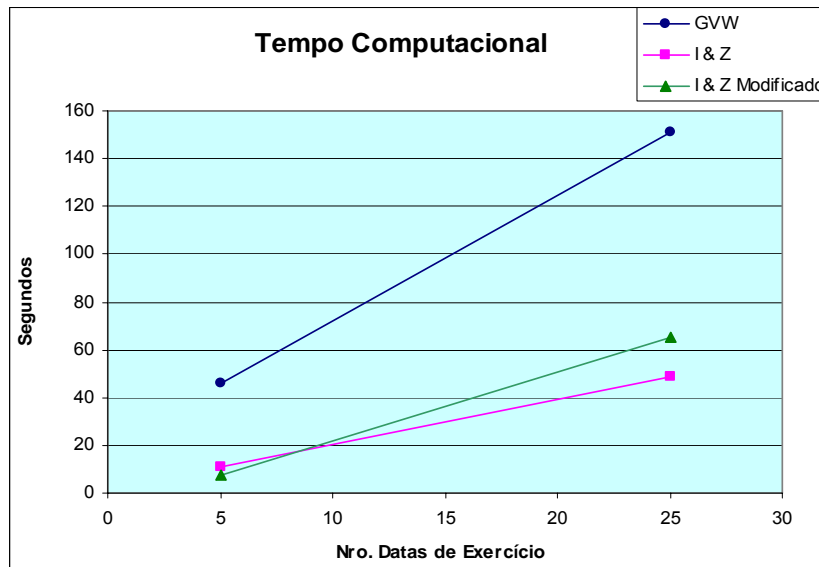


Figura 5: Tempo computacional em função do número de datas de exercício

6 Conclusões e Considerações Finais

O grande apelo na utilização do algoritmo de Grant, Vora e Weeks [7], deve-se ao fato de que esta metodologia permite o cálculo prévio de uma curva de gatilho, a qual é muito relevante, especialmente quando são avaliadas opções reais. A curva de gatilho permite identificar o momento ótimo de exercer a opção, tanto em opções financeiras bem como em opções de projetos de investimento, por exemplo, investir ou abandonar o projeto.

No presente trabalho foram avaliados os algoritmos de Grant, Vora e Weeks [7] e Ibáñez e Zapatero [9]. Este último também determina uma curva de gatilho, e portanto, ambos os algoritmos são possíveis de serem comparados em quanto à eficiência na determinação da curva de gatilho e na exatidão dos resultados. Adicionalmente foram propostas modificações no algoritmo de Ibáñez e Zapatero [9], de forma a obter uma melhor precisão no cálculo dos preços das opções de venda americanas. O resultado final dos testes é exibido na Figura 4.

Por outro lado, observou-se que o número de datas de exercício é um parâmetro que influencia de maneira relevante na precisão dos resultados (ver Figura 2). É lógico que ao aumentar as datas de exercício os resultados fiquem mais próximos dos verdadeiros, já que representa melhor o comportamento real de uma opção americana, na qual o exercício dá-se em tempo contínuo e não por intervalos de tempo discretos (opção bermuda).

A proposta feita para melhorar a convergência para os preços críticos de exercício, estabelecendo valores iniciais das derivadas do preço da opção e dos incrementos a cada iteração (passo 3 do algoritmo Ibáñez e Zapatero [9]), mostrou ser bastante eficiente, permitindo melhorar os resultados obtidos por Ibáñez e Zapatero [9]. Da mesma forma, o algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado obteve erros bem menores do que Grant, Vora e Weeks [7]. Todos estes algoritmos têm em comum a necessidade de determinar previamente a curva de gatilho. O que varia é como as aproximações para os preços críticos de exercício são realizadas.

Com relação ao tempo computacional, o algoritmo de Ibáñez e Zapatero modificado consome um tempo muito menor do que a metodologia de Grant, Vora e Weeks [7], sendo esta última não prática em problemas complexos.

7 Referências

- [1] Barone-Adesi, G. & Whaley, R.E. “Efficient Analytic Approximation of American Option Value”. *Journal of Finance*, v.42, 1987, pp.301-320.
- [2] Black, F. & Scholes, M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. *Journal of Political Economy*, v.81, 1973, pp.637-659.
- [3] Boyle, P. & Broadie, M. & Glasserman, P. “Monte Carlo Methods for Security Pricing”. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v.21, 1997, pp.1267-1321.
- [4] Broadie, M. & Glasserman, P. “Pricing American-Style Securities Using Simulation”. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v.21, 1997, pp.1323-1352.
- [5] Cox, J.C. & Ross, S.A. & Rubinstein, M. “Option Pricing: A Simplified Approach”. *Journal of Financial Economics*, n.7, 1979, pp.229-263.
- [6] Frota, A.E.F. “Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas”. *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2003.
- [7] Grant, D. & Vora, G. & Weeks, D.E. “Path-Dependent Options: Extending the Monte Carlo Simulation Approach”. *Management Science*, v.43, 1997, pp.1589-1602.
- [8] Huang, J. & Subrahmanyam, M.G. & Yu, G.G. “Pricing and Hedging American Options; A Recursive Integration Method”. *Review of Financial Studies*, v.9, 1996, pp.277-300.
- [9] Ibáñez, A. & Zapatero, F. “Monte Carlo Valuation of American Options Through Computation of the Optimal Exercise Frontier”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.39, 2004, pp.253-275.
- [10] Nascimento, A. F. “Avaliação de Investimentos em Tecnologia da Informação: uma Perspectiva de Opções Reais”. *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2005.