

Fronteiras DEA Difusas

João Carlos C. B. Soares de Mello * Eliane Gonçalves Gomes †
Lidia Angulo Meza ‡ Luiz Biondi Neto § Annibal Parracho Sant Anna *

* Depto. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense. Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24240-240, Niterói, RJ, Brasil
jcsmello@producao.uff.br, tppaps@vm.uff.br

† Embrapa Monitoramento por Satélite. Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, Parque São Quirino, 13088-300, Campinas, SP, Brasil
gui@dps.uminho.pt

‡ Departamento de Ciência dos Materiais - Universidade Federal Fluminense. Av. dos Trabalhadores 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ
lidia_a_meza@yahoo.com

§ Depto. de Eng. Eletrônica e Telecomunicações - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. A-5036, Maracanã, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lbiondi@uerj.br

Abstract

The “fuzzy” DEA frontier is applied in situations where some variables (inputs or outputs) present a certain degree of uncertainty in its measurement, without any assumption about the probability distribution function. We build the efficient frontier taking in account the minor and major values of the input (or output). The efficient frontier is, in that case, a fuzzy set, to which the DMUs have a degree of membership. In order to compute the degree of membership two frontiers are constructed: the optimistic and the pessimistic frontiers. As this indicator isn't an efficiency score, we introduce the inverted frontier concept, which allows the fuzzy-DEA efficiency score computation. We developed the case where only one variable present a certain degree of uncertainty and it is generalised to the case where some or all variables are uncertain.

Resumo

A fronteira DEA difusa surge em situações nas quais algumas variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam um certo grau de incerteza na medição, sem que se assumam que os valores obedecem a alguma distribuição de probabilidade. A fronteira eficiente é construída considerando-se os limites de incerteza, isto é, os menores e maiores valores possíveis de serem assumidos pela variável afectada pela incerteza de medição. Dessa forma, constrói-se

uma região em relação à qual as DMUs possuem um certo grau de pertença. Para calcular o grau de pertença são construídas fronteiras otimistas e pessimistas. Como o grau de pertença não é uma medida de eficiência, é introduzido o conceito de fronteira invertida que permite calcular um índice de eficiência difuso. É mostrado o caso em que apenas uma variável apresenta incerteza e é generalizado para o caso em que algumas ou todas as variáveis apresentam incertezas.

Keywords: DEA, Fuzzy sets, Fuzzy DEA efficiency score.

Title: Fuzzy DEA Frontiers

1 Introdução

Os modelos de Análise Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis – DEA) clássicos (Cooper et al., 2000) estimam uma fronteira não paramétrica, linear por partes, constituída pelas unidades eficientes. Supõem ainda que existe certeza na determinação das medidas usadas. No entanto, isso pode não ocorrer, seja por efectiva incerteza nas medidas, seja porque os dados são considerados intervalares (Cooper et al., 2000). No primeiro caso, a solução clássica é usar a Análise de Fronteira Estocástica (Stochastic Frontier Analysis) (Coelli et al., 1998), que supõe que as incertezas seguem alguma distribuição de probabilidade. Essa abordagem, cuja introdução pode ser vista em Lovell (1993), utiliza métodos econométricos e paramétricos. Na prática, entretanto, essa distribuição de probabilidade pode não ser conhecida. Sant’Anna (2002) propõe um modelo de cálculo probabilístico de eficiências, sem levar em conta a distribuição de probabilidade, mas que não gera um índice único de eficiência.

A proposta deste artigo, que estende os resultados de Soares de Mello et al. (2002) [29], é construir um índice único de eficiência, para a situação em que as variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam incerteza. É feita, inicialmente, a formulação para o caso em que apenas uma variável apresenta incerteza. Para tal, a fronteira eficiente é considerada como um conjunto difuso (Zadeh, 1965) em relação ao qual as unidades em avaliação (*Decision Making Units* – DMUs) apresentam um certo grau de pertença. Os limites inferior e superior desse conjunto difuso são denominados fronteira pessimista e fronteira otimista quando a variável com incerteza é um *output*, e inversamente quando a variável de incerteza é o *input*.

A troca dos *outputs* com *inputs* conduz a uma fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002) em relação à qual as DMUs também possuem um grau de pertença. É então possível, com os dois graus de pertença, definir um índice de eficiência, que será denominado *eficiência difusa* ou *eficiência fuzzy-DEA*.

Estes mesmos conceitos são estendidos para o caso em que várias variáveis apresentam incerteza. É feita uma formulação geométrica para o caso de um *input* e um *output*, que posteriormente é generalizada para o caso multidimensional.

Na literatura são encontradas algumas alternativas para a incorporação de incertezas aos modelos DEA. Nessas proposições, os PPLs e/ou as medidas de eficiência assumem funções da lógica difusa. Na abordagem apresentada neste artigo é utilizada somente a filosofia da lógica difusa sem, no entanto, utilizar suas funções características.

2 Revisão bibliográfica em modelos DEA difusos

Uma revisão bibliográfica sobre os distintos enfoques utilizados para lidar com dados imprecisos pode ser encontrada em Zhu (2003). O autor divide a imprecisão em três tipos: dados com limites superior e inferior, dados ordinais e razões de dados com limites superior e inferior. O modelo utilizado para esse caso é o IDEA (*Imprecise Data Envelopment Analysis*) (Cooper et al., 1999), sendo este um problema de programação não linear que, com pequenas variações, lida com os três tipos de dados imprecisos, com o uso de transformações de escala. Por existirem problemas associados à transformação de escala, o autor propõe um enfoque simplificado, que converte as variáveis utilizadas em dados exactos. Os resultados mostram que os índices de eficiência assim obtidos são calculados mais facilmente.

Lertworasirikul et al. (2003) tratam *inputs* e *outputs* imprecisos como conjuntos difusos. Esses modelos são formalizados através de programação linear *fuzzy*. Como enfoque alternativo, os autores propõem a utilização de “modelos DEA de possibilidades” (*possibility DEA models*) que incorporam medidas de possibilidade para os eventos difusos na forma de restrições difusas. Uma variável difusa é associada a uma distribuição de possibilidades (Zadeh, 1978). Nesse enfoque, os índices *fuzzy*-DEA são únicos, mas dependentes do nível de possibilidade utilizado, isto é, para vários níveis de possibilidade utilizados há diversos índices diferentes correspondentes.

O modelo IDEA (*Imprecise Data Envelopment Analysis*) é usado por Despotis e Smirlis (2002) para lidar com dados imprecisos de dois tipos: dados com limites superior e inferior (dados por intervalos ou *interval data*) e dados ordinais. A utilização desse modelo não linear é feita através de uma mudança de escala das variáveis, que transforma o modelo não linear em um modelo de programação linear. Como resultado, obtém-se um limite superior e inferior para a eficiência de uma determinada DMU, o que, segundo os autores, permite uma melhor discriminação entre as DMUs com a utilização de modelos *post* DEA. Os autores propõem ainda um modelo *post* DEA para determinar *inputs* alvos para DMUs ineficientes.

Entani et al. (2002) empregam um modelo DEA para avaliar DMUs de forma otimista. Esses resultados são utilizados para determinar a eficiência por intervalos, através da proposição de novos modelos DEA. Assim, o índice de eficiência não é representado por um número, mas sim por um intervalo de eficiência. Por outro lado, com base no modelo *Inverted DEA* (Yamada et al., 1994) avaliam cada DMU de forma pessimista e calculam índices de ineficiência por intervalos. Os autores consideram ainda dados por intervalos (*interval data*) e propõem um modelo para calcular a eficiência e a ineficiência por intervalos, tal como foi feito para os dados com valores únicos e exactos.

A avaliação do desempenho de departamentos acadêmicos de uma Universidade é realizada por Lopes e Lanzer (2002). Os resultados de DEA nas dimensões de ensino, pesquisa, extensão e qualidade foram modelados como números difusos e agregados através de um agregador ponderado, o que gera um único índice de desempenho para cada departamento.

Cooper et al. (2001) propõem um modelo IDEA estendido. Esse modelo permite não somente o uso de dados incertos, mas também o uso de restrições aos pesos do tipo regiões de segurança ou *cone-ratio*. Nesse caso, os limites das variáveis são transformados em ajustes de dados. O modelo é aplicado à avaliação de eficiência de postos de uma companhia de telecomunicações coreana.

O modelo DEA CCR (Charnes et al., 1978) é estendido para um modelo denominado DEARA por Guo e Tanaka (2001). Esse modelo utiliza conceitos da análise de regressão e é estendido para um modelo DEA difuso que considera *inputs* e *outputs* difusos. Os índices de eficiência resultantes são índices de eficiência difusos ou intervalares.

Kao e Liu (2000) apresentam um procedimento para medir as eficiências das DMUs que envolvem variáveis difusas. O modelo difuso é transformado em uma família de modelos DEA convencionais baseados em dados exactos, utilizando o enfoque α -cut. Os índices de eficiência difusos obtidos são expressos por meio de funções intervalares. Dessa maneira, segundo os autores, há maior nível de informação para a gerência.

Para medir a eficiência técnica de DMUs, Triantis e Eeckaut (2000) relaxam o conceito de fronteira de produção e propõem uma comparação por pares ao verificar a dominância ou não dominância de uma DMU quando comparada a outra. A utilização de variáveis difusas (dados imprecisos) faz com que o resultado dessa comparação seja uma comparação difusa por pares (*fuzzy pair-wise comparison*). Os resultados das comparações feitas par a par são apresentados em uma matriz, que mostra dominância em dois sentidos. Assim, não são obtidos índices de eficiência, mas uma indicação sobre quem domina quem. Deve-se realçar que caso esse modelo fosse usado com dados exactos, geraria um modelo equivalente ao FDH (*Free Disposal Hull*) (Deprins et al., 1984).

Hougaard (1999) usa intervalos difusos para unir em um índice de eficiência a informação fornecida pelos índices de eficiência analíticos (DEA) e índices de eficiência subjectivos baseados em dados que reflectem aspectos qualitativos e organizacionais, expressos na forma de intervalos difusos. Uma função de um intervalo *fuzzy* representa a forma de especificar a relação entre esses dois tipos de informação. De forma ideal, as duas fontes de informação relacionadas ao desempenho de uma DMU podem ser unidas de forma que a “objectividade” de DEA possa ser utilizada para controlar a “subjectividade” do ponto de vista do especialista, e vice-versa. O resultado é um índice corrigido expresso na forma de um intervalo difuso.

Uma abordagem em três estágios para medir a eficiência técnica em ambiente difuso é proposta por Triantis e Girod (1998). Essa abordagem usa DEA clássico e incorpora conceitos desenvolvidos em programação paramétrica difusa (Carlsson e Korhonen, 1986).

Sengupta (1992) explora a teoria dos conjuntos difusos no contexto de DEA. O autor usa três tipos de estatísticas difusas (programação matemática difusa, regressão difusa e entropia difusa) para ilustrar os tipos de decisão e de solução que podem ser alcançados quando os dados são vagos e a informação *a priori* é inexacta e imprecisa.

3 Formulação para uma variável com incerteza

3.1 Criação da fronteira DEA difusa

A abordagem aqui proposta destaca-se das anteriores por não fazer nenhuma suposição em relação à forma como cada *input* ou cada *output* varia. Qualquer que seja a variação são levados em conta apenas os valores máximos e mínimos possíveis de serem assumidos, com o uso posterior de programação linear clássica e modelos DEA tradicionais para a determinação das fronteiras.

Se em um modelo DEA não houver certeza sobre os valores assumidos por um *output*; não haverá igualmente certeza sobre a exacta localização da fronteira eficiente. Caso os valores do *output* para algumas DMUs sejam maiores que o suposto, a fronteira estará deslocada “mais acima”, isto é, em uma região de valores superiores para esse *output*. Caso os valores sejam inferiores ao suposto, a fronteira estará “mais abaixo”.

Portanto, neste caso, a fronteira não é um conjunto no sentido clássico do termo, mas um conjunto difuso (Zadeh, 1965). Para esse conjunto não tem sentido dizer que um elemento pertence ou não ao conjunto; deve-se fazer referência ao grau de pertença desse elemento ao conjunto. Dessa forma, em vez de existirem DMUs na fronteira e outras fora da fronteira, haverá DMUs com diferentes graus de pertença à fronteira.

Em lógica difusa clássica são postuladas certas funções, denominadas funções de pertença, que determinam o grau de pertença de uma certa variável a um determinado conjunto. No caso da fronteira difusa, o grau de pertença será calculado com base em propriedades geométricas das fronteiras geradas. Para tal, torna-se necessário definir previamente alguns termos. A fronteira localizada “mais acima” é, na verdade, aquela fronteira obtida por um modelo DEA clássico (CCR ou BCC) que leva em conta o máximo valor do *output* incerto que cada DMU pode atingir. Como, em termos de produção, essa é a melhor situação para todas as DMUs, a fronteira assim obtida denominar-se-á *Fronteira Optimista*. Analogamente, a fronteira obtida com o modelo DEA clássico que considere o menor valor de *output* para cada DMU é a *Fronteira Pessimista*, já que considera a situação menos favorável de produção.

A Figura 1 ilustra esses conceitos, para o modelo DEA BCC (Banker et al., 1984). A fronteira difusa é toda a região situada entre as fronteiras pessimista (fronteira inferior) e optimista (fronteira superior). Note-se ainda que uma DMU não é mais representada por um ponto; a incerteza na medição do *output* faz com que a representação da DMU seja um segmento de recta com extremidades determinadas pelos valores pessimista e optimista desse *output*.

Na Figura 1, OP_{fo} e OP_{fp} referem-se ao *output* projectado na fronteira optimista e pessimista, respectivamente. c é o comprimento da DMU, ou seja, é a diferença entre os valores optimista e pessimista do *output*; l é a largura da faixa, isto é, representa para cada DMU a diferença entre o valor do *output* incerto para as fronteiras optimista e pessimista; p é parte que está na faixa, é a diferença entre o *output* optimista de cada DMU e a intersecção dessa DMU com a fronteira pessimista.

Uma vez definidos a fronteira difusa e os termos c , l e p , deve-se definir o grau de pertença de cada DMU a essa fronteira. Na Figura 2 observa-se que as DMUs A e F estão integralmente contidas na região que define a fronteira difusa. Essas DMUs devem ter grau de pertença 1 à fronteira. Já as DMUs B e C apenas tocam a fronteira e, portanto, o grau de pertença é nulo. Entre esses dois casos extremos, as DMUs poderão ter graus de pertença intermédios.

A DMU G contém toda a largura da fronteira difusa, mas tem uma parte da largura da faixa externa à fronteira. Ou seja, na hipótese de *outputs* pessimistas em DEA clássico, a DMU não seria eficiente. Assim, apesar de não estar totalmente excluída da fronteira, a sua pertença também não é total.

Em situações semelhantes à da DMU G , a pertença deveria obedecer à relação p/c , unitária quando $p = c$. Por outro lado, a observação da DMU E , mostra que ela está totalmente

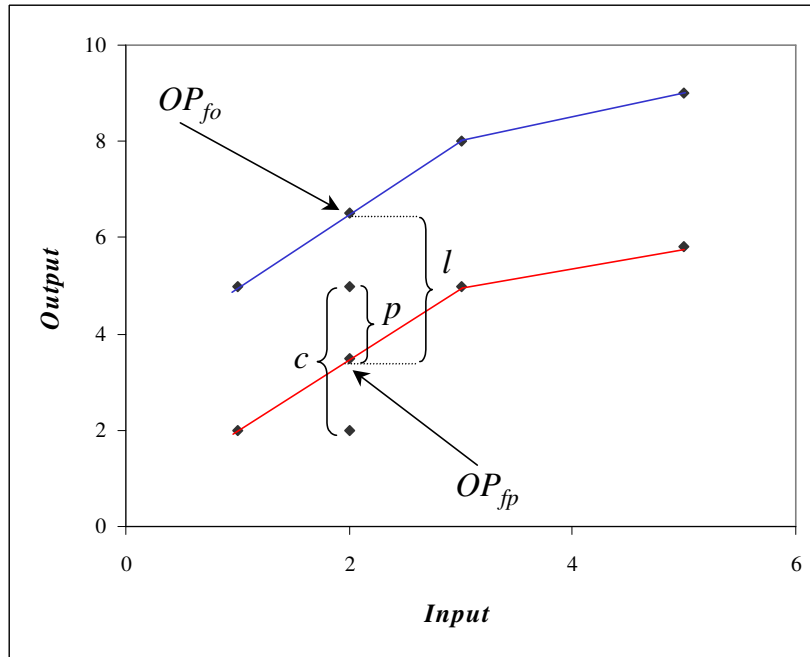


Figura 1: Fronteiras otimista e pessimista.

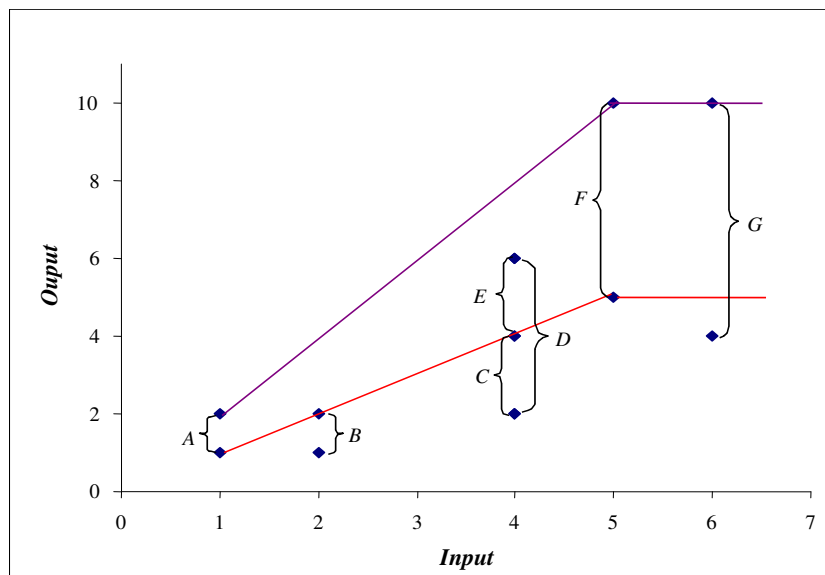


Figura 2: Fronteira difusa no modelo BCC.

Tabela 1: Pertenças em relação à fronteira difusa.

DMU	I	O_{fp}	O_{fo}	c	l	p	\wp
A	1	1	2	1	1	1	1,00
B	2	1	2	1	2	0	0,00
C	4	2	4	2	4	0	0,00
D	4	2	6	4	4	2	0,25
E	4	4	6	2	4	2	0,50
F	5	5	10	5	5	5	1,00
G	6	4	10	6	5	5	0,83

contida na fronteira difusa, porém existe uma região da fronteira que não contém a DMU. Então, caso sejam considerados *outputs* otimistas em DEA clássico, a DMU não é eficiente. Para situações análogas a essa, a pertença deveria ser p/l , unitária quando $p = l$. Torna-se necessário combinar os dois casos, de forma a garantir que uma DMU só tenha pertença 1 à fronteira difusa se ela for eficiente tanto na hipótese pessimista quanto na otimista.

O produto das expressões usadas anteriormente, consideradas como pertenças parciais, satisfaz a essa propriedade. Assim, a pertença à fronteira difusa é definida pela equação (1).

$$\wp = \frac{p^2}{lc} \tag{1}$$

A Tabela 1 traz os resultados de cálculo de pertença para as DMUs da Figura 2, onde O_{fp} e O_{fo} são, respectivamente, os valores do *output* nas fronteiras pessimista e otimista, e I é o valor do *input*.

3.2 Cálculo algébrico da pertença

O cálculo anterior baseia-se em uma definição geométrica e, portanto, só é viável em modelos extremamente simples. Para obter-se uma expressão que possa ser usada em modelos gerais, multidimensionais, em que apenas um *output* apresenta incerteza, faz-se necessário transformar as grandezas geométricas da equação (1) em quantidades que possam ser extraídas dos modelos DEA clássicos: *outputs* otimistas e pessimistas, eficiências com *output* pessimista em relação à fronteira pessimista (Ef_{fp}) e com *output* otimista em relação à fronteira otimista (Ef_{fo}).

Para o caso de um *output* com incerteza, ao considerarem-se as definições clássicas de DEA orientado a *outputs*, e que, nesta situação, as eficiências são dadas por números maiores que a unidade, têm-se as equações (2) e (3), nas quais O_{fo} e O_{fp} são os valores nas fronteiras otimista e pessimista deste *output*.

$$Ef_{fp} = \frac{OP_{fp}}{O_{fp}} \tag{2}$$

$$Ef_{fo} = \frac{OP_{fo}}{O_{fo}} \tag{3}$$

A largura da faixa l é a diferença entre o alvo da fronteira otimista e o alvo da fronteira pessimista, ou seja, $l = OP_{fo} - OP_{fp} = O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$. O comprimento da DMU c é a diferença entre o *output* otimista e o pessimista, isto é, $c = O_{fo} - O_{fp}$. A parte da DMU que está na fronteira p é a diferença entre o *output* otimista e o alvo do *output* pessimista na fronteira pessimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *output* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira difusa; caso contrário, p deve ser igual a 0. Em (4) formaliza-se a equação para p .

$$\begin{aligned} p &= O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0 \\ p &= 0, \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (4)$$

Ao serem substituídos os valores de p (calculado em (4)), l e c (determinados no parágrafo anterior) na expressão (1), é possível obter a expressão que represente algebricamente a pertença. Essa relação é apresentada em (5).

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{(O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})^2}{(O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})(O_{fo} - O_{fp})}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0 \\ \wp &= 0, \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (5)$$

Além do caso em que $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} < 0$, onde o índice de pertença foi arbitrado como nulo, o cálculo algébrico dessa pertença também é zero caso $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} = 0$. Por outro lado, como o numerador de (5) está elevado ao quadrado, nunca assume um valor negativo. Na orientação a *outputs*, o alvo na fronteira otimista é sempre maior que o alvo na fronteira pessimista, e o *output* otimista é sempre maior que o *output* pessimista. Dessa forma, o denominador é, igualmente, sempre positivo. Portanto, o índice de pertença é sempre um número não negativo.

Caso as eficiências otimista e pessimista sejam unitárias, o índice de pertença é $\frac{(O_o - O_p)^2}{(O_o - O_p)(O_o - O_p)} = 1$. De outro lado, observa-se que $O_pEf_{fp} \geq O_p$ (uma vez que na orientação a *outputs* a eficiência é maior ou igual a 1). Portanto, tem-se que $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$. Verifica-se ainda que $O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$ (haja visto que $O_{fo}Ef_{fo} \geq O_{fo}$). Logo, na fração (5) cada termo do denominador é maior ou igual que a raiz quadrada do numerador. Conseqüentemente, o numerador não é maior que o denominador e o índice de pertença não pode ser maior que a unidade.

Deve-se observar ainda que o índice de pertença (5), embora calculado a partir de eficiências não é uma medida de eficiência. Assim, não precisa respeitar as propriedades das medidas de eficiências. Em particular, o conjunto de DMUs com pertença unitária à fronteira difusa não é necessariamente um conjunto convexo.

A Tabela 2 apresenta os valores de eficiências, l , c , p e \wp com base nas equações (2) a (5), para o exemplo da Figura 2. Destaca-se que como a orientação do modelo é a *outputs*, as DMUs ineficientes apresentam valor de eficiência maior que 1.

Tabela 2: Valores calculados com base nas relações (2) a (5).

DMU	I	O_{fp}	O_{fo}	$E_{f_{fp}}$	$E_{f_{fo}}$	c	l	p	φ
A	1	1	2	1,00	1,00	1	1	1	1,00
B	2	1	2	2,00	2,00	1	2	0	0,00
C	4	2	4	2,00	2,00	2	4	0	0,00
D	4	2	6	2,00	1,33	4	4	2	0,25
E	4	4	6	1,00	1,33	2	4	2	0,50
F	5	5	10	1,00	1,00	5	5	5	1,00
G	6	4	10	1,25	1,00	6	5	5	0,83

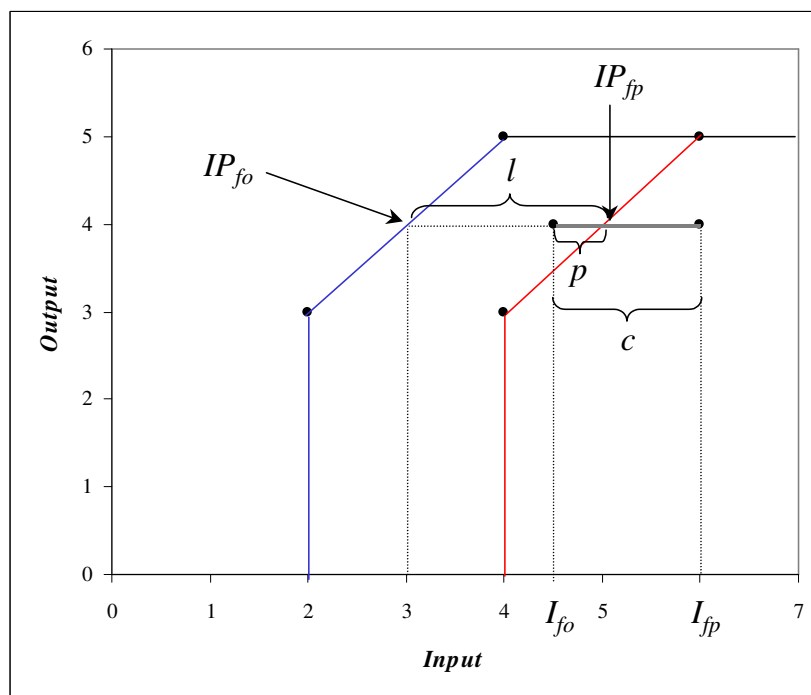


Figura 3: Fronteiras otimista e pessimista para o caso de modelo BCC orientado a *inputs*.

3.3 Fronteira Difusa com um *Input* com Incerteza

De forma análoga ao que acontece com um *output* com incerteza, pode-se apresentar o caso em que haja um *input* com incerteza. Nesse caso, define-se como *input* otimista, I_{fo} , aquele com o menor valor que o *input* pode assumir, e *input* pessimista, I_{fp} , o de maior valor que o *input* pode assumir. Quando se consideram os *inputs* otimistas para todas as DMUs, tem-se a fronteira otimista; quando são considerados os *inputs* pessimistas para todas as DMUs, obtém-se a fronteira pessimista. A Figura 3 representa as fronteiras otimista e pessimista para o caso de *input* com incerteza na mediação. Nessa figura I_{fo} , I_{fp} , IP_{fo} e IP_{fp} são, respectivamente, os valores otimista e pessimista do *input* e os valores do *input* projectado nas fronteiras otimista e pessimista.

O segmento de recta que representa um *input* com incerteza é horizontal, ao contrário do caso orientado a *outputs* em que a DMU é representada por um segmento vertical.

Deduções semelhantes às do caso *anterior*, permitem definir o índice de pertença apresentado em (6). As mesmas considerações feitas para a expressão (5), continuam válidas desde que seja considerado que em (6) as eficiências são orientadas a *inputs*, ou seja, são valores menores ou iguais a 1.

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{(I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo})^2}{(I_{fo}Ef_{fo} - I_{fp}Ef_{fp})(I_{fp} - I_{fo})}, \text{ se } I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo} \geq 0 \\ \wp &= 0, \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (6)$$

3.4 Fronteira Invertida e Eficiência *Fuzzy-DEA*

O grau de pertença à fronteira não é uma medida de eficiência. De fato, duas DMUs que tenham grau nulo de pertença à fronteira podem ter posições relativas bem diferentes não detectadas pelo índice aqui proposto. Ou seja, ao contrário dos modelos DEA clássicos que fornecem muitos empates nos índices 100% eficientes, o enfoque apresentado neste artigo fornece empates para as DMUs totalmente não pertencentes à fronteira.

Para distinguir entre essas DMUs é necessário introduzir o conceito de fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002), que consiste em considerar os *outputs* como *inputs* e os *inputs* como *outputs*. Esse enfoque admite pelo menos duas interpretações. A primeira é que a fronteira consiste das DMUs com as piores práticas gerenciais (e poderia ser chamada de fronteira ineficiente); a segunda é que essas mesmas DMUs têm as melhores práticas segundo um ponto de vista oposto.

Uma fronteira invertida difusa pode ser utilizada para distinguir entre as diversas DMUs com grau de pertença zero à fronteira difusa original. Para esse caso, quanto maior o grau de pertença à fronteira invertida menor a eficiência da DMU.

Para obter um índice único de eficiência, deve-se englobar os dois graus de pertença e obrigar a que a variação do índice se dê entre 0 e 1. Esse índice será chamado de *eficiência difusa* (ou *eficiência fuzzy-DEA*) (Ef_{difusa}) e é dado pela equação (7), na qual \wp_o é o grau de pertença à fronteira original e \wp_i é o grau de pertença à fronteira invertida.

$$Ef_{difusa} = \frac{(\wp_o - \wp_i + 1)}{2} \quad (7)$$

Apesar de, por simplicidade de linguagem, a agregação dos dois índices de pertença tenha recebido a denominação de *eficiência difusa*, ele não é um indicador de eficiência no sentido clássico do termo. É apenas uma ponderação normalizada entre um índice de pertença, e o complementar de outro índice de pertença.

A Figura 4 ilustra os conceitos de fronteira invertida difusa para o caso de um *input* e um *output*. Para esse exemplo, os graus de pertença e a eficiência difusa são mostrados na Tabela 3 (dados originais de *input* e *output* na Tabela 1).

Em vez de usar o complementar da pertença à fronteira invertida é possível trabalhar com um índice de não pertença a essa fronteira. Para conjuntos clássicos, estas formulações são equivalentes, mas tal não acontece em conjuntos difusos.

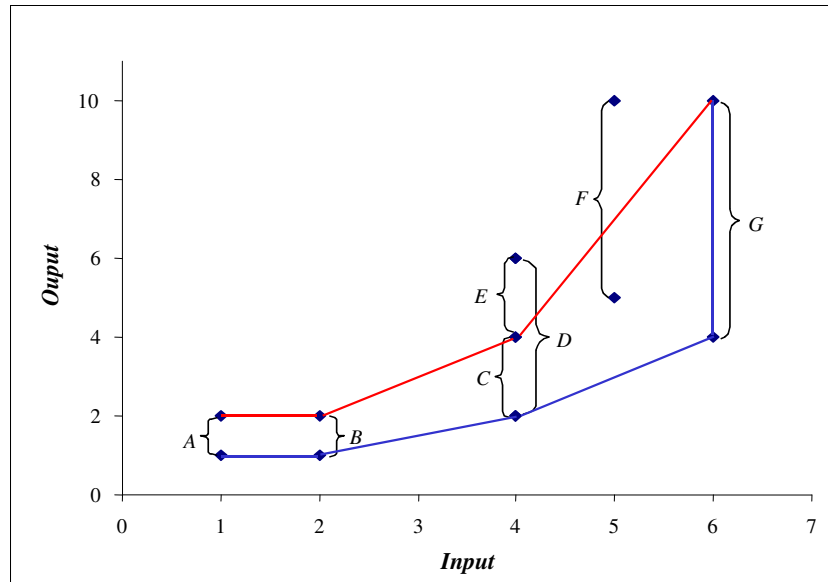


Figura 4: Fronteira difusa invertida no modelo BCC.

Tabela 3: Graus de pertença e de não pertença e eficiência difusa para as DMUs da Figura 4.

DMU	φ_o	φ_i	Ef_{difusa}	$Im\varphi_i$	$Ef_{difusaIm}$
A	1,00	1,00	0,50	0,00	0,50
B	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
C	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
D	0,25	0,50	0,37	0,00	0,125
E	0,50	0,00	0,75	1,00	0,75
F	1,00	0,20	0,90	0,30	0,65
G	0,83	1,00	0,42	0,00	0,165

O índice de não pertença deverá ser tanto maior quanto maior for a relação entre o segmento da DMU localizado fora da fronteira invertida difusa e o segmento de reta que representa a DMU. Deverá ser, também, tanto maior quanto maior a relação entre o que falta à DMU para ocupar totalmente a largura da faixa que constitui a fronteira invertida e a largura total desta faixa.

O índice de não pertença à fronteira invertida, $Im\varphi_i$, é dado pela equação (8), na qual $F1$ e $F2$ denotam os limites superior e inferior da fronteira invertida, e $U1$ e $U2$ os limites superior e inferior da DMU avaliada. Sua generalização é apresentada em (9) para o caso de um *input* com incerteza.

$$\begin{aligned} Im\varphi_i &= \frac{\overline{U1F1}}{U1U2} \times \frac{\overline{U2F2}}{F1F2}, \text{ se } F1 > U2 \\ Im\varphi_i &= 1, \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Im\varphi_i &= \frac{(I_p - I_p E f_p)(I_o - I_o E f_o)}{(I_p - I_o)(I_p E f_p - I_o E f_o)}, \text{ se } I_p E f_p > I_o \\ Im\varphi_i &= 1, \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (9)$$

Para os dados da Tabela 1, os resultados obtidos com esta abordagem são os mostrados nas duas últimas colunas da Tabela 3. Embora as ordenações produzidas sejam semelhantes, a DMU mais eficiente foi alterada. A DMU E , totalmente fora da fronteira invertida, toma a posição de mais eficiente da DMU F nesta formulação, penalizada um pouco mais fortemente pela sua pertinência parcial a essa fronteira.

4 Formulação para várias variáveis com incerteza

4.1 Conceitos gerais

As formulações anteriores são restritas ao caso em que apenas uma variável apresenta incerteza. Pode ocorrer que mais de uma, ou mesmo todas as variáveis apresentem incerteza. Torna-se então necessário generalizar os conceitos anteriores.

O ponto mais pessimista é agora o ponto da DMU que está a ser avaliada com os maiores valores para todos os *inputs* e os menores para todos os *outputs*. Analogamente, o ponto mais otimista é o ponto da DMU com os menores valores para todos os *inputs* e os maiores para todos os *outputs*.

Mais uma vez, a fronteira pessimista é determinada com um modelo DEA para todos os pontos mais pessimistas e, analogamente, a fronteira otimista é calculada com os pontos mais otimistas. Os alvos de cada DMU nas duas fronteiras são os alvos pessimistas e otimistas. No entanto, devido à variação em mais de uma variável, estes alvos são não radiais, e a direcção de projecção é determinada pelo vector que une os pontos extremos de cada DMU.

A figura 5 ilustra os conceitos anteriores, no caso de um modelo com apenas 1 *input* e 1 *output*, ambos com incerteza. Nela, A é o ponto mais pessimista, C o mais otimista; B é o alvo pessimista e D o otimista. Por analogia com o caso em que só uma das variáveis apresenta incerteza, o índice de pertença à fronteira difusa é definido pela equação (10).

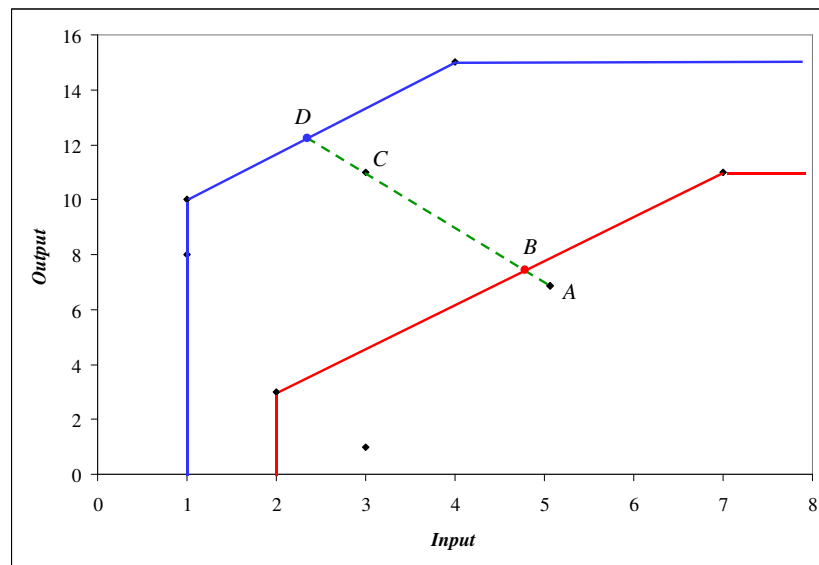


Figura 5: Fronteira DEA difusa com *input* e *output* com incerteza.

$$\varphi = \frac{\overline{BC} \overline{BC}}{\overline{BD} \overline{AC}} \tag{10}$$

O cálculo dos alvos pode ser feito pela intersecção da recta suporte do segmento que define a DMU com as fronteiras pessimista e optimista. Este cálculo, no caso bidimensional apresentado, é relativamente fácil. No entanto, em casos de maior dimensão, seria necessário conhecer as equações de todas as faces, o que é impraticável. Este é um modelo de complexidade exponencial (Fukuda, 1993; Dulá, 2002) e os algoritmos existentes ou não são práticos ou são inviáveis (Gonzalez-Araya, 2003).

4.2 Modelo Multiobjectivo

Para contornar o problema de determinação de faces, utiliza-se o modelo multiobjectivo para determinação de alvos (Angulo-Meza, 2002; Angulo-Meza et al., 2002; Soares de Mello et al., 2003), cuja formulação é apresentada em (11), no caso do modelo DEA-CCR.

Tabela 4: Dados para o exemplo numérico multidimensional.

DMU	I_{fp}	I_{fo}	O_{fp}	O_{fo}
A	3	1	1	10
B	7	4	12	15
C	2	1	3	8
D	5	3	7	11

$$\begin{aligned}
& \max \phi_1 \\
& \dots \\
& \max \phi_s \\
& \min \varphi_1 \\
& \dots \\
& \min \varphi_m \\
& \text{sujeito a} \\
& \phi_r y_{rj0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \\
& \varphi_i x_{ij0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \\
& \phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \\
& \varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \\
& \lambda_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{11}$$

Em (11) optimizam-se as projecções de cada uma das variáveis (s *outputs* e m *inputs*) de maneira independente. O modelo fornece como resultado um conjunto de alvos para a DMU que está a ser avaliada (em um total de n DMUs), e o utilizador, ou decisor, é o encarregado de fazer a escolha final do alvo.

Neste caso, o alvo procurado é aquele que passa pela recta que une os pontos mais optimistas e mais pessimistas. Uma vez que em um espaço n -dimensional uma recta é definida por $n - 1$ equações lineares, o modelo multiobjectivo transforma-se em um modelo mono-objectivo.

4.3 Exemplo Numérico

A Tabela 4 traz os dados para o exemplo numérico multidimensional, ou seja, em que o *input* e o *output* apresentam incertezas a medição. Para ilustrar considere-se DMU D , cujo ponto pessimista está dado por (5,7) e o optimista por (3,11). A recta que passa por esses pontos esta dada pela equação apresentada em (12).

$$y = -2x + 17 \tag{12}$$

Logo, a equação da recta que passa pelos alvos pessimista e optimista da DMU é dada pela equação (13).

$$\phi y = -2\phi x + 17 \tag{13}$$

O alvo para a fronteira pessimista é calculado com o emprego do modelo multiobjectivo (11), no qual acrescentou-se a restrição de convexidade para considerar a fronteira definida pelo modelo BCC, conforme mostrado em (14).

$$\begin{aligned}
 & \max 7\phi \\
 & \min 5\varphi \\
 & \text{sujeito a} \\
 & 7\phi = \lambda_1 + 12\lambda_2 + 3\lambda_3 + 7\lambda_4 \\
 & 5\varphi = 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + 5\lambda_4 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
 & \phi \geq 1 \\
 & \varphi \leq 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \forall j
 \end{aligned} \tag{14}$$

Ao substituir-se a equação da recta (12) que passa pelos alvos optimista e pessimista no modelo (14), e sendo $x = 5$, tem-se o modelo (15).

$$\begin{aligned}
 & \max = -2(5)\varphi + 17 = \min 10\varphi \\
 & \min 5\varphi \\
 & \text{sujeito a} \\
 & -2(5)\varphi + 17 = \lambda_1 + 12\lambda_2 + 3\lambda_3 + 7\lambda_4 \\
 & 5\varphi = 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + 5\lambda_4 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
 & \varphi \leq 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \forall j
 \end{aligned} \tag{15}$$

Já que ambas as funções objectivo estão em função de φ , uma delas pode ser eliminada e, dessa forma, o modelo multiobjectivo transforma-se em um modelo mono-objectivo, apresentado em (16).

$$\begin{aligned}
 & \min 5\varphi \\
 & \text{sujeito a} \\
 & -10\varphi + 17 = \lambda_1 + 12\lambda_2 + 3\lambda_3 + 7\lambda_4 \\
 & 5\varphi = 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + 5\lambda_4 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
 & \varphi \leq 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \forall j
 \end{aligned} \tag{16}$$

Ao correr-se o modelo (16), obtêm-se como resultados $5\varphi = 4,63$, alvo para o *input*, e, por substituição em (13), $7\phi = 7,74$, alvo para o *output*.

O mesmo procedimento deve ser realizado para a fronteira optimista. Dessa forma, o modelo multiobjectivo para calcular o alvo optimista de D é formalizado em (17).

$$\begin{aligned}
& \max 11\phi \\
& \min 3\varphi \\
& \text{sujeito a} \\
& 11\phi = 10\lambda_1 + 15\lambda_2 + 8\lambda_3 + 11\lambda_4 \\
& 3\varphi = \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \phi \geq 1 \\
& \varphi \leq 1 \\
& \lambda_j \geq 0, \forall j
\end{aligned} \tag{17}$$

Procedendo-se de maneira análoga ao caso da fronteira pessimista, obtém-se o modelo (18) na fronteira optimista.

$$\begin{aligned}
& \max -2(3)\varphi + 17 = \min 6\varphi \\
& \min 3\varphi \\
& \text{sujeito a} \\
& -2(3)\varphi + 17 = 10\lambda_1 + 15\lambda_2 + 8\lambda_3 + 11\lambda_4 \\
& 3\varphi = \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \varphi \leq 1 \\
& \lambda_j \geq 0, \forall j
\end{aligned} \tag{18}$$

Similarmente, o modelo multiobjectivo transforma-se no modelo mono-objectivo (19), cuja resolução resulta em $3\varphi = 2, 36$, alvo para o *input*, e $11\phi = 12, 27$, alvo para o *output*.

$$\begin{aligned}
& \min 3\varphi \\
& \text{sujeito a} \\
& -6\varphi + 17 = 10\lambda_1 + 15\lambda_2 + 8\lambda_3 + 11\lambda_4 \\
& 3\varphi = \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \varphi \leq 1 \\
& \lambda_j \geq 0, \forall j
\end{aligned} \tag{19}$$

Com esses valores e com a equação (10), calcula-se a pertença, \wp , da DMU D à fronteira difusa, conforme (20).

$$\wp = \left[\frac{\overline{(4, 63; 7, 74)(3; 11)}}{\overline{(4, 63; 7, 74)(2, 36; 12, 27)}} \right] \left[\frac{\overline{(4, 63; 7, 74)(3; 11)}}{\overline{(5; 7)(3, 11)}} \right] = 0, 586 \tag{20}$$

De forma análoga, podem ser calculados alvos para as demais DMUs, bem como os índices para a fronteira invertida.

5 Conclusões

A abordagem proposta neste artigo para incorporação de incertezas aos modelos DEA clássicos tem a vantagem de não arbitrar, nem uma determinada distribuição de probabilidade para as incertezas das variáveis, nem uma função difusa para as mesmas. É, ao mesmo tempo, matematicamente simples, já que os resultados são obtidos através de cálculos algébricos, sem necessidade de usar programação linear difusa.

Ao determinar uma região onde se encontra a fronteira difusa e ao construir geometricamente uma função de pertença e, conseqüentemente, a medida de eficiência difusa, os desenvolvimentos deste artigo situam-se próximos à origem dos conjuntos difusos sem, no entanto, usar suas funções características.

Adicionalmente, o índice proposto para medir a eficiência difusa, permite resolver um dos principais problemas em DEA, qual seja, o de as DMUs poderem ser eficientes atribuindo peso nulo a vários multiplicadores (Estellita-Lins e Angulo-Meza, 2000). Com efeito, para uma DMU possuir alta eficiência, esta deve ter um elevado grau de pertença em relação à fronteira otimista e baixo grau em relação à fronteira pessimista. Dessa forma, todas as variáveis são levadas em conta no índice final. Assim, não basta a DMU ter bom desempenho naquilo em que ela é melhor; não deve ter também mau desempenho no critério em que for pior. Isso é conseguido sem a atribuição de nenhum peso subjectivo a qualquer critério.

Essa característica permite eliminar outro dos inconvenientes dos modelos DEA BCC: o fato de a DMU de maior *output* ser eficiente independentemente dos valores dos *inputs* (Ali, 1993). No modelo aqui proposto, o valor da eficiência de tal DMU depende também de sua posição em relação à fronteira invertida. Deve ser ressaltado que existem outros métodos para resolver esse problema. Entretanto, ou exigem julgamentos subjectivos, como é o caso das restrições aos pesos (Allen et al., 1997) ou, alternativamente, exigem métodos matemáticos mais sofisticados, como é o caso da suavização da fronteira DEA (Soares de Mello et al., 2002) [30].

O modelo para várias variáveis com incerteza é resolvido de forma eficiente com ajuda da formulação multiobjectivo de DEA. No entanto, devido à quantidade de cálculos envolvidos torna-se necessário o desenvolvimento de um *software* específico, de modo que este modelo torne-se prático.

6 Referências

- [1] Ali, A.I. (1993). Streamlined computation for data envelopment analysis. *European journal of operational research*, **64**, 61-67.
- [2] Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G. & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, **73**, 13-34.
- [3] Angulo-Meza, L.(2002). Um Enfoque Multiobjetivo para determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA). Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.
- [4] Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Biondi Neto, L. (2002). Fronteira DEA de dupla envoltória no estudo da evolução da ponte aérea Rio-São Paulo. *Panorama*

- Nacional da Pesquisa em Transportes 2003 - Anais do XVII ANPET*, **2**, 1158-1166.
- [5] Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, **30** (9), 1078-1092.
- [6] Carlsson, C. & Korhonen, P. (1986). A Parametric Approach to Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 17-33.
- [7] Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-454.
- [8] Coelli, T., Rao, D.S.P. & Battese, G.E. (1998). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [9] Cooper, W.W., Park, K.S. & Yu, G. (2001). An illustrative application of IDEA (imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean mobile telecommunication company. *Operations Research*, **49** (6), 807-820.
- [10] Cooper, W.W., Park, K.S. & Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. *Management Science*, **45**, 597-607.
- [11] Cooper, W.W., Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [12] Deprins, D., Simar, L. & Tulkens, H. (1984). Measuring Labor Inefficiency in Post Offices. **In:** *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements* [edited by M. Marchand, P. Pestieau & H.Tulkens]. North-Holland, Amsterdam, 243-267.
- [13] Despotis, D.K. & Smirlis, Y.G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European Journal of Operational Research*, **140**, 24-36.
- [14] Dulá, J.H. (2002). Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 165-182
- [15] Entani, T., Maeda, Y. & Tanaka, H. (2002). Dual Models of Interval DEA and its extensions to interval data. *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.
- [16] Estellita-Lins, M.P. & Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- [17] Fukuda, K. (1993). cdd.c: C Implementation of the Double Description method for computing all vertices and extremal rays of a convex polyhedron given a system of linear inequalities. Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland.
- [18] González-Araya, M.C. (2003). Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- [19] Guo, P. & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, **119**, 149-160.
- [20] Hougaard, J.L. (1999). Fuzzy scores of technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, **115**, 529-541.
- [21] Kao, C. & Liu, S.T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, **113**, 427-437.
- [22] Lertworasirikul, S., Fang, S.C., Joines, J.A. & Nuttle, H.L.W. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, **139** (2), 379-394.
- [23] Lopes, A.L.M. & Lanzer, E.A. (2002). Data envelopment analysis – DEA and fuzzy sets to assess the performance of academic departments: a case study at Federal University of Santa Catarina – UFSC. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 217-230.

- [24] Lovell, C.A.K. (1993). Production frontiers and production efficiency". **In:** *The measurement of productive efficiency: techniques and applications* [edited by H.O. Fried, C.A.K. Lovell & S.S. Schmidt]. Oxford University Press, New York, 3-67.
- [25] Novaes, L.F.L. (2002). *Envoltória Sob Dupla ótica aplicada na avaliação imobiliária em ambiente do sistema de informação geográfica*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- [26] Sant'Anna, A.P. (2002). Cálculo probabilístico de produtividades globais no ensino de pós-graduação em Engenharia de Produção. *Anais do VIII Encontro de Educação em Engenharia*, Petrópolis.
- [27] Sengupta, J.K. (1992). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, **24** (8-9), 259-266.
- [28] Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Serapiao, B.P., Estellita-Lins, M.P. (2003). Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para Companhias Aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, **23** (2), 325-345.
- [29] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N., Angulo-Meza, L. (2002). Construção de uma fronteira eficiente difusa na presença de dados com incertezas na medição. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Outubro.
- [30] Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita-lins, M.P. & Gomes, E.G. (2002). Construction of a smoothed dea frontier. *Pesquisa operacional*, **22** (2), 183-201.
- [31] Triantis, K. & Eeckaut, P.V. (2000). Fuzzy Pair-wise Dominance and Implications for Technical Efficiency Performance Assessment. *Journal of Productivity Analysis*, **13**, 207-230.
- [32] Triantis, K. & Girod, O. (1998). A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in a Fuzzy Environment. *Journal of Productivity Analysis*, **10** (1), 85-102.
- [33] Yamada, Y, Matui, T. & Sugiyama, M. (1994). New analysis of efficiency based on DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37** (2), 158-167.
- [34] Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8** (3), 338-353.
- [35] Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28.
- [36] Zhu, J. (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. *European Journal of Operational Research*, **144**, 513-529.