

Programação de operações em sistemas com tempo de processamento variável e com buffers de preparação

José António Oliveira * M.^a Sameiro de Carvalho *
J. M. Valério de Carvalho *

* Departamento de Produção e Sistemas
Universidade do Minho
Braga - Portugal
{vc,sameiro,zan}@dps.uminho.pt

Abstract

In this work a scheduling operation problem with variable processing times is analysed. In particular this project is concerned with the scheduling of the truck load operations and the preparation of loads in buffers in an automatic warehouse. The truck load operations can be assumed as processing tasks with ready times (availability of the trucks) and due dates (trip cut off time). Additionally, it is possible to process a task before ready time by using a buffer where a truck load is assembled to be transferred to the truck in a later time period. Processing time is variable and depends upon the number of tasks simultaneously in progress. A minimum number of simultaneous tasks is assumed in order to guarantee a maximum, nominal, rate of expedition.

A procedure based on Dynamic Programming with truck expedition times ordered by EDD rule is presented. The algorithm efficiency is also discussed.

Resumo

Neste artigo apresenta-se um problema de planeamento de operações para a expedição de mercadorias em camiões num sistema automático de armazenamento. O carregamento de um camião pode ser entendido como o processamento de uma tarefa com data de disponibilidade e data de entrega. Os tempos de processamento das tarefas são variáveis e dependem do número de tarefas a serem processadas simultaneamente. Neste sistema de armazenamento existe a possibilidade de iniciar o processamento de uma tarefa antes da sua data de disponibilidade, utilizando para o efeito uma zona de preparação antecipada, que substitui temporariamente o camião. Diariamente, dado um conjunto de tarefas a processar, pretende-se elaborar o plano operacional para a sua execução de modo a minimizar a soma dos atrasos na expedição.

Apresenta-se um procedimento baseado em programação dinâmica para a definição do plano operacional relativo à expedição dos camiões com o objectivo de minimizar a soma dos atrasos, estudando-se a sua eficiência computacional.

Keywords: Logistics, Scheduling, Warehousing.

Title: Scheduling variable processing time operations in systems with buffers.

1 Introdução

Os modernos conceitos de armazenagem visam sincronizar os elementos da cadeia logística, proporcionando todo um conjunto acrescido de operações, tais como: a consolidação de encomendas (preparação de encomendas para clientes com produtos provenientes de vários produtores); “cross-docking” (operação de preparação de encomendas mas que não envolve armazenagem dos produtos); processamento (operações que acrescentam valor aos produtos; ex. embalagem), etc. Benefícios económicos resultam, em cada caso, de vários factores: diminuições nos custos de transporte, reduções nos custos de armazenagem e manuseamento dos produtos, menores níveis de stock, etc.

Os sistemas automáticos de armazenagem facilitam as acções de logística. Estes sistemas devem ser eficientes para justificar o investimento que envolvem e constituírem uma alternativa aos sistemas convencionais de armazenagem. A eficiência de um sistema automático de armazenagem depende, entre outros factores, do planeamento das operações de recepção e expedição de mercadorias.

O planeamento de operações deve ser efectuado de um modo cuidado de forma a garantir que os camiões partem do armazém antes das datas limites, e serem capazes de entregar as encomendas nos clientes sem atrasos, principalmente no caso dos armazéns automáticos que funcionam com (elevadas) taxas de expedição de mercadoria, próximas do valor limite para as quais foram dimensionados. Neste artigo, apresenta-se um algoritmo para a programação das operações associadas à expedição de mercadorias, com o objectivo de minimizar a soma dos atrasos. Em particular, estuda-se o planeamento das operações do sistema automático de colocação e recolha de paletes do armazém. O sistema automático de colocação e recolha de paletes é controlado pelo Warehouse Management System (WMS). Além do controlo do sistema automático, o WMS decide as posições de armazenagem das paletes, escolhe a sequência da recolha das paletes e determina também o movimento dos empilhadores.

Tipicamente, neste tipo de sistemas de armazenagem, é o supervisor que define o plano de operações, selecciona as cargas / viagens que são preparadas a cada momento. De acordo com o nosso melhor conhecimento, esta selecção de cargas é usualmente baseada em simples regras de despacho, sendo depois a eficiência das regras avaliada usando modelos de simulação Elsayed e Stern [2], Gibson e Sharp [4] e Randhawa e Shroff [6]. Neste trabalho desenvolve-se uma estratégia para o sequenciamento das cargas e um procedimento baseado em Programação Dinâmica, que gera soluções onde as viagens são agrupadas em blocos de processamento simultâneo. Estes modelos são inseridos no Warehouse Programming System (WPS), que determina os tempos de início das operações de carregamento de cada carga. O supervisor insere essa informação no WMS para o funcionamento do sistema. Obviamente, os planos obtidos devem ser tais que o WMS, seguindo as suas próprias regras, possa executar o plano dentro dos tempos previstos. O WMS e o WPS foram integrados num sistema desenvolvido pela empresa EFACEC Automação e Robótica, S. A. em 1998 para um centro de distribuição.

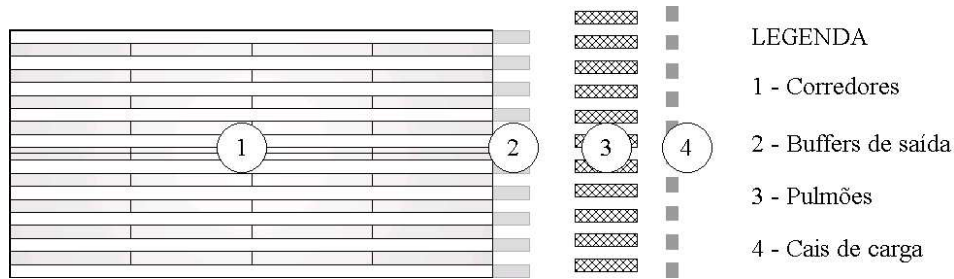


Figura 1: Layout do armazém

O artigo está organizado do seguinte modo: na secção seguinte, descreve-se o funcionamento de um armazém automático e identifica-se o problema de planeamento; a terceira secção é dedicada à caracterização do problema, na quarta secção procede-se à construção do modelo para este problema de planeamento; a quinta secção é dedicada ao algoritmo desenvolvido, baseado em programação dinâmica e à determinação da sua eficiência; por fim, discutem-se as conclusões sobre este trabalho.

2 Descrição do sistema de armazenamento

O sistema de armazenamento tem capacidade para armazenar cerca de 38 mil paletes em alvéolos. As paletes, com os artigos encomendados pelos clientes, são expedidas por camiã. A viagem de um camiã consiste no transporte de um conjunto de cerca de três dezenas de paletes. Os camiões disponíveis para efectuar o transporte das paletes têm idêntica capacidade. O conjunto de paletes que formam a carga de uma dada viagem é conhecido e fixo.

Na Figura 1 apresenta-se um esquema da planta do armazém. O corpo principal do armazém é constituído por onze corredores. Em cada corredor existe um “*stockador*” automático para movimentar as paletes desde os alvéolos até ao “*buffer de saída*”, colocado no topo do corredor. A jusante dos corredores, as paletes são movimentadas por empilhadores. Existe um conjunto de n_e empilhadores que recolhe as paletes nos buffers de saída dos corredores e as coloca nos camiões ou nos pulmões, conforme o modo de preparação da carga.

A preparação (da carga) de uma viagem significa a recolha, movimentação e formação do conjunto de paletes, que será transportado no mesmo camiã. Uma viagem pode ser preparada de um de dois modos diferentes, relativamente à movimentação e formação do seu conjunto de paletes. No modo directo as paletes são agrupadas dentro do camiã, através da movimentação das paletes, pelos empilhadores, desde o buffer de saída do corredor até ao camiã. Abreviadamente diz-se que a viagem é preparada com uma operação (b-c). Alternativamente, no modo indirecto, as paletes são agrupadas numa área, que se designa por “pulmão”, através da movimentação das paletes, pelos empilhadores, desde o buffer de saída do corredor até ao pulmão. Abreviadamente diz-se que a viagem é preparada com uma operação (b-p). Posteriormente, o conjunto de paletes é transferido do pulmão para o camiã numa operação que designamos por (p-c) e que é executada por um empilhador de transferência e_{pc} . Existe um conjunto de $n_{e_{pc}}$. A operação de transferência das paletes do pulmão para o camiã só pode ser iniciada depois de a viagem ter sido completamente preparada no pulmão e, uma vez iniciada, não pode ser interrompida até estar terminada.

Os pulmões são áreas com capacidade equivalente à dos camiões, nas quais as viagens podem ser preparadas numa data anterior à chegada dos camiões ao armazém. Define-se data de disponibilidade da viagem como a data da chegada do camião ao armazém. A existência de pulmões permite relaxar as datas de disponibilidade das viagens que são preparadas nos pulmões.

Essencialmente a utilização de um pulmão permite a “armazenagem” de capacidade de processamento de alturas de menor solicitação para períodos onde o trabalho de expedição é mais intenso. A operação (p-c) é mais rápida do que a operação (b-c), o que permite aumentar a taxa de expedição de camiões, facilitando o cumprimento das datas de entrega. A expedição, sem atrasos, de um elevado número de viagens numa janela temporal pequena (definida pelas datas de chegada dos camiões e pelas datas de entrega) só poderá eventualmente ser possível se parte dessa procura for satisfeita através da transferência de cargas previamente preparadas em pulmões. Outra vantagem das preparações em pulmões é que o sistema pode funcionar de um modo mais equilibrado quanto ao número de processamentos de viagens por unidade de tempo.

O sistema de armazenamento deve ter uma taxa nominal de funcionamento μ_s que deve ser a mais elevada possível, para tornar eficiente a sua utilização e justificar o seu investimento. No sistema em análise, em termos de saídas, a capacidade prevista de manuseamento dos 11 stockadores é constante e igual a $\mu_m = 240$ paletes/hora.

Seja μ_e a capacidade de manuseamento de um empilhador expressa em paletes/hora. A capacidade de movimentar paletes dos n_e empilhadores é dada por $n_e\mu_e$, assumindo uma relação linear o número de empilhadores e a taxa de serviço. Os empilhadores devem ser em número suficiente de modo a garantir o funcionamento do sistema à taxa de expedição de paletes definida pelos stockadores. Se tal não acontecer, os empilhadores não são capazes de remover as paletes que os stockadores colocam nos buffers de saída, levando à imobilização dos stockadores quando os respectivos buffers de saída estão cheios. De facto, os stockadores e os empilhadores formam um sistema em série em que a capacidade do sistema é dada pela menor das duas capacidades

$$\mu_s = \min(\mu_m, n_e\mu_e) \quad (1)$$

No que se segue, vamos assumir que os n_e empilhadores existentes no sistema igualam a capacidade dos stockadores em termos de movimentação de paletes.

$$n_e\mu_e = \mu_m \quad (2)$$

Este sistema de armazenamento funciona continuamente. No entanto a expedição de viagens é feita entre as 6 horas e as 24 horas. O período entre as 0 horas e as 6 horas pode ser usado para preparar viagens em pulmão, reorganizar as paletes nos alvéolos e proceder a operações de entrada de mercadorias.

Existem 13 cais de carga, $N_c = 13$, onde os camiões são carregados, quer recebendo paletes directamente do corredor, quer do pulmão. Existem 21 pulmões para a preparação antecipada de viagens, $N_p = 21$.

O número de viagens expedidas por dia é da ordem de uma centena, tendo todas as viagens igual importância. Cada viagem tem um instante de saída do armazém, o qual deve ser cumprido planeando correctamente a hora de início de preparação da viagem, e ainda o

início de transferência de pulmão para camião, no caso das preparações feitas em pulmão. Como princípio, a programação não deve admitir atrasos. O plano operacional do armazém deve entrar em linha de conta com todos estes factores e minimizar a soma dos atrasos gerados pelas viagens que são concluídas após a hora limite de saída.

3 Características do problema

O estabelecimento de um plano de operações requer a definição do instante de início de preparação (da carga) de uma viagem, que pode ser uma preparação em camião ou num pulmão. Para as viagens preparadas em pulmão é necessário definir também o instante de início de transferência do pulmão para o camião.

Para auxiliar na construção do modelo para este problema de planeamento definiram-se as seguintes variáveis, que seguem de perto a notação usada em [1]:

v_j – designa a viagem j . Neste trabalho utiliza-se o termo “viagem” para denotar o mesmo que o termo “tarefa”, utilizado na literatura de planeamento da produção.

r_j – data de disponibilidade de v_j . Define o instante de chegada ao sistema do camião que transporta v_j . As operações (b-c) e (p-c) só podem ser iniciadas depois deste instante.

d_j – data de entrega de v_j . Define o instante em que o camião deve abandonar o sistema sem haver atraso.

t_{pc} – tempo de processamento de uma operação (p-c). Tem um valor fixo, porque é assumido que as viagens têm igual número de paletes.

s_j – instante em que se inicia a preparação de v_j , que pode ser com as operações (b-c) ou (b-p).

st_j – instante em que se inicia a operação (p-c), se v_j tiver sido preparada em pulmão.

B_j – instante em que termina a preparação de v_j , quer tenha sido preparada com operações (b-c) ou (b-p).

C_j – instante em que v_j sai do sistema de armazenamento.

Uma viagem diz-se “activa”, quando é iniciada a sua preparação em s_j , e permanece nesse estado até ao instante B_j em que recebe a última paleta. Por outro lado, uma viagem diz-se “aberta”, quando é iniciada a sua preparação em s_j , e permanece nesse estado até ao instante C_j , em que se conclui o carregamento do camião. O estado activo e o estado aberto são coincidentes no caso das preparações em modo directo, pois $B_j \equiv C_j$. Nas preparações em modo indirecto, o estado activo termina com a conclusão da recolha das paletes no pulmão, no instante B_j , mas a tarefa permanece aberta até ao fim da transferência do pulmão para o camião que ocorre no instante posterior C_j . Para qualquer tarefa verifica-se $B_j \leq C_j$.

A demora de uma viagem D_j é uma variável que toma valores não negativos e é medida relativamente ao instante de saída do sistema, $D_j = \max(C_j - d_j, 0)$.

A movimentação das paletes pelos stockadores e pelos empilhadores pode ser modelada como uma fonte que assegura um fluxo de paletes, que é constante ao longo do tempo. A capacidade de movimentação de paletes é medida em paletes por unidade de tempo. Iremos assumir que, em cada instante, esta capacidade é partilhada equitativamente pelas viagens que estão activas.

Um ponto crucial do modelo é que os tempos de processamento das viagens são dependentes

do número de viagens a serem processadas simultaneamente, isto é, o tempo necessário para completar uma viagem depende do número de viagens activas. Se o número de viagens activas for mais pequeno, mais rápida será a sua preparação.

De modo a facilitar o entendimento sobre os tempos de processamento vamos considerar um tempo nominal de processamento de uma viagem que teoricamente corresponderia à preparação da viagem com a totalidade do fluxo de paletes proveniente dos corredores, ou seja, corresponderia à preparação de uma única viagem à taxa $\mu_m = 240$ paletes/hora. Designa-se por tempo nominal de processamento de uma viagem p_j , o tempo teórico que demoraria a preparar a carga de uma viagem se fosse possível essa viagem receber todo o fluxo de paletes à taxa nominal de funcionamento do sistema, e independente de se tratar uma preparação num pulmão ou num camião. Dado que o número de paletes por viagem é aproximadamente constante, iremos considerar que o tempo nominal de processamento é igual para todas as viagens, verificando-se a relação $p_j = p, \forall j$.

Há, no entanto, que impor um limite mínimo ao número de viagens activas, N_{\min} . Se essa restrição não existir, pode não ser possível assegurar o fluxo nominal de funcionamento do sistema. Para ilustrar este ponto, vamos considerar a situação limite em que todo o sistema está apenas a executar uma viagem. Haverá um grande número de empilhadores a fornecer paletes para a mesma viagem, o que dá origem a congestionamentos, que se traduzem numa redução da capacidade do sistema, que passa efectivamente a funcionar abaixo da sua capacidade nominal. Na realidade é necessário haver um conjunto mínimo de viagens a serem processadas simultaneamente para escoarem o fluxo de paletes vindas dos corredores. Considera-se que $N_{\min} = 6$ é um valor razoável.

O número de pulmões e de cais disponíveis definem um limite superior ao número de viagens abertas, que se representa por N_{\max} .

Caso particular:

Um caso especial deste problema, em que não existem buffers de preparação $N_p = 0$, foi formulado matematicamente por Valério de Carvalho et al. [7], utilizando um conjunto de variáveis indexadas ao tempo (*time indexed variables*). A formulação apresentada “organiza” a distribuição das paletes disponíveis em cada intervalo de tempo t pelas diferentes viagens que estão activas nesse intervalo de tempo. A solução indica os instantes de activação das viagens, e os intervalos de tempo em que recebem as paletes, que minimizam a soma das penalidades das demoras para uma versão muito geral do problema, em que se consideram datas de disponibilidade e de entrega, e em que se permite que haja diferentes valores para as quantidades de paletes de cada viagem.

Valério de Carvalho et al. [7] mostraram que o problema de decidir se existe um plano válido obedecendo às datas de disponibilidade e de entrega, na versão do problema sem buffers de preparação, $N_p = 0$, pertence à classe de problemas NP-completos.

4 Uma metodologia de solução

Tratando-se de uma generalização de um problema NP-completo, e não se esperando que possa haver algoritmos eficientes para a sua solução, foi decidido usar uma estratégia de solução, baseada em programação dinâmica, com o objectivo de minimizar a soma das demoras das



Figura 2: Diferentes modos de processar três viagens

viagens. Neste algoritmo, a ordenação da expedição das viagens é feita pela regra Earliest Due Date (EDD), ou seja, as viagens são sempre ordenadas por valores crescentes de data de entrega, $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, e expedidas por essa ordem. A estratégia adoptada consiste em definir uma partição do conjunto de viagens em subconjuntos disjuntos de viagens que estão activas simultaneamente. Estes subconjuntos de viagens são designados por blocos. São também respeitados os limites para o número de viagens activas e para o número de viagens abertas, respectivamente N_{min} e N_{max} .

4.1 Datas de disponibilidade

As datas de chegada dos camiões são estabelecidas pelos responsáveis da gestão do armazém. Assim, e de acordo com o plano de preparação das viagens, é solicitado diariamente à empresa de transporte que aluga os camiões, um conjunto de camiões para efectuar o transportes das viagens desse dia, o que permite assumir que as datas de disponibilidade dos camiões são consistentes com as datas de entrega, verificando-se a relação $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$.

4.2 Tempos variáveis de processamento

Tal como foi referido na Secção anterior, os tempos de preparação de cada viagem são variáveis e dependem do número de viagens em processo simultaneamente. O esquema da Figura 2 apresenta 4 modos diferentes de planear a preparação de três viagens, com iguais tempos nominais de preparação. No caso I, ilustra-se o processamento individual de cada viagem. Nos casos II e III duas viagens são preparadas simultaneamente e no último caso as três viagens são processadas simultaneamente.

No entanto, salienta-se o facto de a viagem 3 ter sempre a sua conclusão no instante t_3 . Este facto resulta de a expedição acumulada de 3 viagens equivaler a uma quantidade (fixa) de paletes que são processadas pelo sistema a uma taxa que é igual nos 4 casos.

4.3 Definição dos blocos

Foi aceite que as viagens deveriam ser sequenciadas pela regra EDD. No modelo que vamos usar para justificar o uso desta regra, iremos considerar que todas as transferências pulmão-cais a executar no bloco podem ser feitas simultaneamente, mesmo que o número de empilhadores disponíveis para o efeito possa ser ultrapassado. Esta simplificação foi considerada aceitável.

Após o fim de um bloco, podemos caracterizar o estado do sistema pelo número de viagens

já saídas e pelo número de preparações disponíveis em pulmão. Vamos considerar que o bloco que a seguir se inicia é um bloco válido, em que o número de operações de cada um dos tipos, (p-c), (b-c) e (b-p), obedece às restrições impostas, em particular às datas de disponibilidade.

O número de operações de cada tipo permite identificar inequivocamente a quantidade de viagens activas e de viagens saídas no bloco. Todas as viagens activas têm os mesmos instantes de início e de fim, coincidindo com os instantes de início e de fim do bloco, e a duração do bloco depende apenas do número de viagens activas.

Em primeiro lugar, vamos definir a ordem relativa das operações (b-c) e (b-p). Dado que as datas de disponibilidade são consistentes, trocar a ordem EDD de duas viagens em operação (b-c) não traz melhoria ao valor da função objectivo. Portanto, todas as viagens em operação (b-c) devem seguir a regra EDD. Por outro lado, as viagens a que as operações (b-p) dizem respeito sairão em blocos subsequentes, pelo que corresponderão a viagens de maior índice segundo a ordenação EDD.

Em segundo lugar, vamos definir a ordem das operações (b-c) e (p-c) relativas às viagens que saem no bloco. O número de operações de cada tipo é bem definido. O estado do sistema no início do bloco permite identificar o número de preparações disponíveis em pulmão. Em blocos com operações (p-c) e (b-c), uma operação (p-c) ou deve dizer respeito a uma viagem de menor índice que todas as viagens em operação (b-c), ou a uma viagem de maior índice que todas as viagens em operação (b-c), não podendo essa preparação ser atribuída a uma viagem de índice intermédio, pelas razões que se expõem de seguida.

Vamos considerar os índices das viagens que resultam da sua ordenação EDD. Vamos supor que uma operação (p-c) era atribuída a uma viagem com índice EDD intermédio. Da troca dessa viagem por uma outra viagem processada em operação (b-c) resultariam sempre vantagens; a troca deveria ser feita com uma viagem de menor ou maior índice EDD, conforme o caso, como se analisa seguidamente.

O uso da operação (p-c) para uma viagem de menor índice EDD poderia diminuir a soma dos atrasos, por diminuir o atraso ou ajudar a respeitar a data de entrega da viagem de menor índice. Lembra-se que todas as viagens em operação (b-c) continuariam a ter o mesmo instante de início e de fim de processamento, em particular as que precedem e as que sucedem à viagem que correspondia à operação (p-c) antes da troca. Dado que as datas de disponibilidade são consistentes, se, antes da troca, todas as datas de disponibilidade eram respeitadas, após a troca, continuariam a sê-lo. A Figura 3 ilustra esta situação.

Por outro lado, pode ser necessário atribuir a operação (p-c) à viagem com maior índice segundo a ordem EDD para ser possível executar o bloco em análise. Isso acontece no caso em que há uma viagem que sai no bloco com uma data de disponibilidade posterior à data de início do bloco. A atribuição da operação (p-c) a uma viagem com índice intermédio poderia implicar a execução dessa viagem em operação (b-c) no final do bloco, o que não seria possível por não respeitar a data de disponibilidade. Neste caso, só mesmo a atribuição da operação (p-c) à viagem de maior índice EDD é que pode viabilizar a saída do número correcto de viagens. A Figura 4 ilustra esta a situação.

Esta opção de executar algumas transferências pulmão cais no final das viagens saídas no bloco só precisa de ser usada no caso de haver viagens no bloco com uma data de disponibilidade superior ao instante de início do bloco. Se todas as viagens do bloco puderem ser iniciadas no

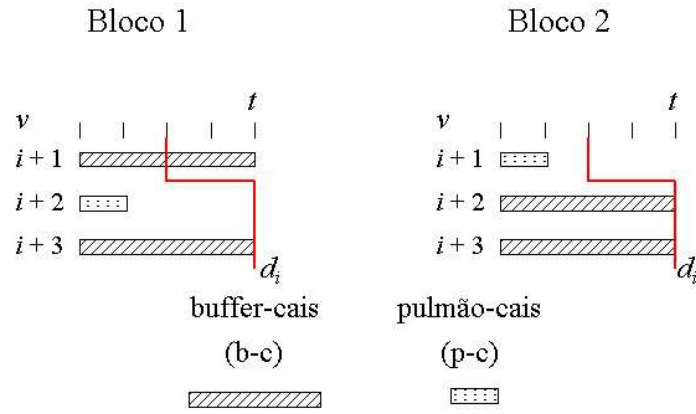


Figura 3: Atribuição de menor índice à operação (p-c)

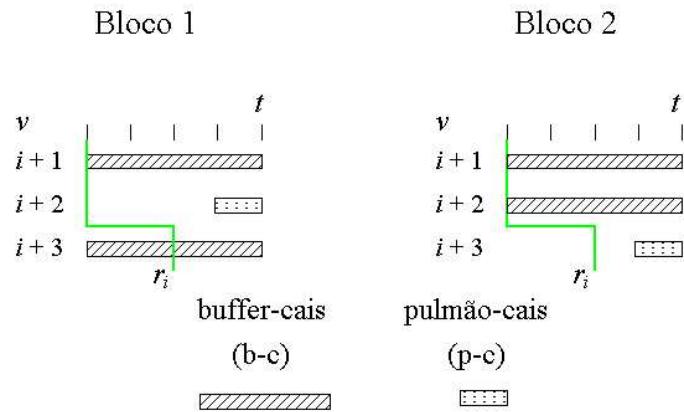


Figura 4: Atribuição de maior índice à operação (p-c)

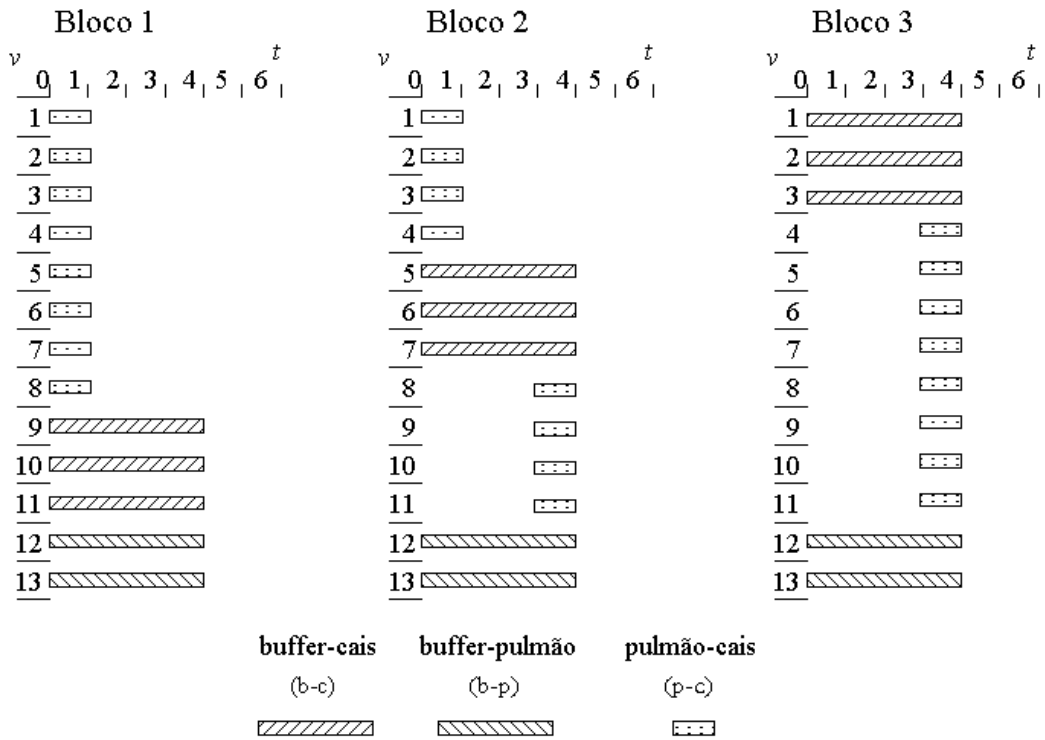


Figura 5: Modos de constituição de um bloco com operações (p-c), (b-c) e (b-p)

instante de início do bloco, a solução em que as operações (p-c) são atribuídas às viagens de menor índice EDD é uma solução que domina todas as alternativas, porque respeita as datas de disponibilidade e tem claramente menor soma de atrasos.

Esta estratégia de construção de blocos permite um melhor ajuste a diferentes configurações de linhas de datas de disponibilidade e de datas de entrega. Na Figura 5, são mostradas três situações em que a ordem das operações (p-c) e (b-c) permite responder a configurações algo diferenciadas.

4.4 Tempo de conclusão das viagens

Neste sistema, assumimos que os tempos reais de conclusão de todas as viagens do bloco coincidem com o instante de tempo em que o bloco termina, embora isso possa não acontecer na realidade para todas as viagens, estando garantido que terminam sempre antes do fim do bloco como se passa a explicar.

Um dos parâmetros que o sistema WMS utiliza para definir a sequência da recolha de paletes é a data de entrega das viagens que estão activas. As paletes pertencentes às viagens com menores datas de entrega têm maior prioridade e podem ser recolhidas em primeiro lugar. Face à sequência de recolha de paletes definida pelo WMS é possível que algumas viagens do bloco estejam terminadas antes do fim do bloco, quando lhes é entregue a última paleta da viagem. Tipicamente, o perfil para as viagens se completarem é ilustrado na Figura 6, em que as viagens são terminadas na sequência v_1, v_3, v_2, v_4, v_5 , coincidindo o fim do bloco com o fim da viagem 5. Dado não ser possível controlar a sequência da recolha das paletes, escolhemos

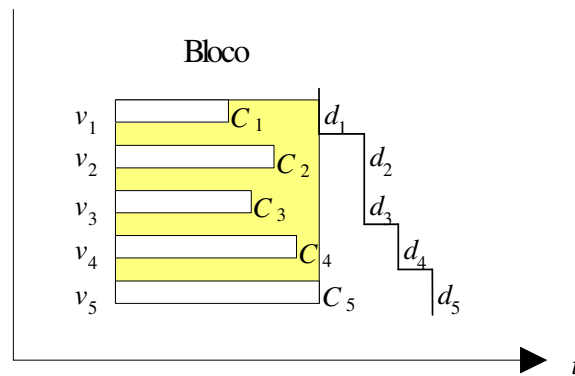


Figura 6: Perfil típico de conclusão das viagens de um bloco

uma opção conservadora, que garante que as datas de conclusão previstas no plano nunca serão ultrapassadas na execução real do plano: prevê-se que o instante de conclusão de todas as viagens do bloco seja o instante em que o bloco termina.

4.5 Duração de processamento dos blocos

A estratégia adoptada consiste em definir uma partição do conjunto de viagens em blocos de processamento, que podem ser constituídos pelos três tipos diferentes de operações de movimentos de paletes e em quantidades que são variáveis.

Considere-se a seguinte notação:

α – quantidade de operações (b-c). Representa o número de preparações em camião;

β – número de operações (p-c). Representa a quantidade de viagens preparadas em pulmão que são transferidas para o camião;

δ – quantidade de operações (b-p). Representa o número de preparações em pulmão.

Vamos designar o conjunto de viagens tratadas no bloco por E . A duração de processamento do bloco, P_E , depende somente do número de preparações do bloco, isto é, depende do número $\alpha + \delta$ de viagens activas. A duração de processamento do bloco é uma função linear da dimensão do próprio bloco, $P_E(\alpha, \beta, \delta)$. Quanto maior for o número de preparações de um bloco, maior é o tempo de processamento das operações, porque o fluxo de paletes (com um valor constante por unidade de tempo) é dividido por um número maior de viagens.

Considere-se um bloco com α operações (b-c), β operações (p-c) e δ operações (b-p). A Figura 7 ilustra a duração de processamento do bloco formado pelas $\alpha + \delta$ de viagens activas.

Seja l o número de paletes por viagem. Num bloco com $\alpha + \delta$ operações, há um total de $l(\alpha + \delta)$ paletes a processar. A expressão que relaciona o número de paletes e o tempo P_E é a seguinte:

$$l(\alpha + \delta) = \int_0^{P_E} \mu_s dt = n_e \mu_e P_E \tag{3}$$

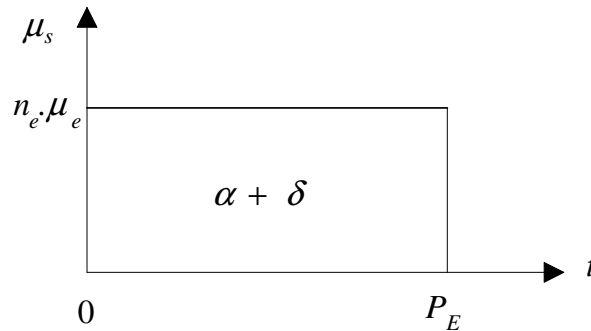


Figura 7: Duração do processamento de um bloco

A duração do bloco é dada por:

$$P_E = \frac{l}{n_e \mu_e} (\alpha + \delta) \tag{4}$$

Do ponto de vista prático, um plano pode não ser executável quando o número de operações (p-c) que é necessário fazer em simultâneo excede o número de empilhadores. No entanto, foi aceite que a execução das transferências pulmão-cais em grupos sucessivos constituía uma aproximação aceitável.

Seja s_{P_E} o instante de início de processamento do bloco. Dado que os tempos nominais de preparação são iguais, verifica-se que todas as viagens activas do bloco, ou sejam, as operações (b-c) e (b-p), têm o mesmo instante de início, $s_j = s_{P_E}$, e o mesmo instante de conclusão de preparação:

$$B_j = s_{P_E} + P_E \tag{5}$$

O número máximo de transferências possíveis em simultâneo é limitado pelo número de empilhadores “transferência” ne_{pc} . Caso se pretenda fazer um maior número de transferências, os tempos C_j do segundo e seguintes grupos de transferências serão maiores, porque as β operações (p-c) são divididas em $S + 1$ grupos, isto é:

$$\beta = S \cdot ne_{pc} + R, \quad S = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

em que R representa o resto da divisão inteira de β por ne_{pc} .

Vamos considerar a transferência de β viagens, em que as transferências são divididas em grupos, da forma indicada na expressão (6). É possível acomodar num bloco qualquer número de transferências, menor que N_p , porque é possível determinar inequivocamente os tempos de conclusão. As transferências são divididas em grupos de dimensão do número de empilhadores transferência. No primeiro grupo as operações (p-c) são iniciadas no instante $st_j = s_{P_E}$, e concluídas no instante:

$$C_j = s_{P_E} + t_{pc} \tag{7}$$

Nos grupos seguintes, as operações (p-c) são iniciadas no instante da conclusão do grupo

anterior e concluídas nos instantes:

$$C_j = s_{PE} + kt_{pc}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (8)$$

em que k representa a ordem em que o grupo é transferido. Nas operações (p-c) que são executadas no final do bloco, os tempos podem ser definidos de forma análoga.

As soluções do problema baseiam-se no dimensionamento dos vários blocos que devem respeitar os valores n_e , N_{\min} e N_{\max} . A definição dos conjuntos de viagens que devem ser transferidas e ou preparadas em paralelo, de modo a que os tempos de conclusão das respectivas preparações respeitem as horas limites de expedição das cargas, responde adequadamente ao problema operacional existente. Se tal não for possível, é necessário escolher a alternativa que minimiza a soma dos atrasos verificados nas horas de partidas.

5 Modelo de programação dinâmica

Em termos gerais, a solução deste problema consiste em determinar uma partição do conjunto das viagens em subconjuntos, tal que seja minimizada a soma dos atrasos.

5.1 Definição do modelo

Para efeitos de apresentação de um modelo de programação dinâmica, considere-se a seguinte notação:

- y – representa (num dado instante) o número de viagens já expedidas que podem ter sido através de operações (p-c) ou através de operações (b-c);
- z – representa (num dado instante) o número de viagens preparadas disponíveis em pulmão.

Os estados do modelo de programação dinâmica serão identificados pelo par ordenado $e_i = (y_i, z_i)$, que permite identificar todos os estados possíveis do sistema.

O estado inicial do modelo é definido para o instante em que se dá início ao período de expedição de viagens. Em princípio, o número de viagens preparadas antecipadamente deve esgotar os pulmões disponíveis, isto é $z_{ini} = N_p$, porque a transferência de pulmão para cais é uma operação mais rápida e que permite concluir as viagens em menor tempo, diminuindo os atrasos. Assim, o estado inicial corresponde a $e_0 = (0, z_{ini})$.

Para um dado estado e_i , é possível, com base na informação dada pelos elementos do par ordenado, calcular o número de viagens já processadas desde o estado inicial. Dado que as viagens estão ordenadas pela regra EDD, o estado e_i significa que as primeiras $y_i + z_i - z_{ini}$ viagens já foram processadas. Isto permite identificar o conjunto E_i de viagens já processadas, sendo $|E_i| = y_i + z_i - z_{ini}$.

As viagens do conjunto E_i representam uma quantidade bem definida de paletes. Atendendo à quantidade de paletes e à taxa de expedição de paletes, é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o número de viagens processadas e o tempo de processamento. A expressão do tempo de preparação associado a um dado estado e_i pode ser derivada de uma forma semelhante à da Expressão (4):

$$t(e_i) = \frac{l}{n_e \mu_e} (y_i + z_i - z_{ini}) \quad (9)$$

Trata-se de uma função linear do número acumulado de viagens já preparadas. É de salientar que, para um dado estado e_i , este tempo é independente da forma como as viagens do conjunto E_i foram subdivididas e agrupadas nos blocos, conforme se ilustra no exemplo da Figura 2.

Havendo um tempo bem determinado associado a cada estado, é possível, ao enumerar as acções alternativas associadas ao estado, avaliar os atrasos que decorrem da expedição das viagens do bloco, e directamente calcular as contribuições de estágio, verificando uma condição fundamental para a aplicação da programação dinâmica [3].

Em cada estágio, para cada estado e_i , é necessário fazer o dimensionamento do próximo bloco de viagens. Seja Δ o conjunto de viagens do próximo bloco, isto é, o próximo bloco é constituído pelo processamento simultâneo de $|\Delta| = \alpha + \beta + \delta$ operações.

Seja Δ^{out} o subconjunto de Δ formado pelas viagens que são expedidas no bloco, $|\Delta^{out}| = \alpha + \beta$. Seja Δ^{act} o subconjunto de Δ formado pelas viagens activas neste bloco $|\Delta^{act}| = \alpha + \delta$.

A transição num estágio de um estado e_i para o estado e_j resulta do planeamento de um bloco formado por Δ viagens, $E_j = E_i \cup \Delta^{act}$ e tem associada uma contribuição de estágio $\gamma_{e_i}(\Delta)$. Esta acção conduz do estado $e_i = (y_i, z_i)$ ao estado $e_j = (y_i + \alpha + \beta, z_i - \beta + \delta)$.

Dado que, ao estado e_i está associado um tempo bem determinado e podemos calcular a duração do bloco, é possível determinar os instantes de conclusão das viagens de um bloco, para operações (b-c) e (p-c), que podem ser calculados de acordo com as Equações (5) e (7), respectivamente. Assim, a cada uma das acções alternativas, podemos associar um custo $\gamma_{e_i}(\Delta)$, dado pela soma dos atrasos respeitantes à expedição das Δ^{out} viagens que formam o bloco, ou seja, $\gamma_{e_i}(\Delta) = \sum_{j \in \Delta^{out}} D_j = \sum_{j \in \Delta^{out}} \max\{C_j - d_j, 0\}$.

A cada estado está associada uma função, Valor de Estado, $\Gamma(e_i)$, que representa o menor custo de planear as viagens representadas pelo estado. O Valor de Estado corresponde ao valor óptimo para resolver um problema reduzido, formado pelas viagens do conjunto E_i associado ao estado.

Dado que cada estado resulta de uma transição de um estado anterior, e se, para todas as possibilidades que conduzem ao estado e_j , escolhermos a que apresenta a menor soma, em termos de valor do estado anterior e da contribuição associado, obtém-se o menor custo para se planear as tarefas de E_j , isto é, $\Gamma(E_j) = \min_i \{\Gamma(E_i) + \gamma(\Delta_i)\}$, em que $E_j = E_i \cup \Delta_i$.

A validade da programação dinâmica requer a verificação das condições de separabilidade e optimalidade. A condição de separabilidade corresponde à validade de utilização de uma relação de recorrência. A relação de recorrência permite que o valor de cada estágio possa ser calculado em função do estágio antecedente e da contribuição de estágio.

$$\Gamma(\emptyset) = 0 \quad (10)$$

$$\Gamma(E_j) = \min_i \left\{ \sum_{j \in E_i} \max\{C_j - d_j, 0\} + \sum_{j \in \Delta_i^{out}} \max\{C_j - d_j, 0\} \right\}, \forall \Delta_i \quad (11)$$

$$\Gamma(E_j) = \min_i \left\{ \Gamma(E_i) + \sum_{j \in \Delta_i^{out}} \max\{C_j - d_j, 0\} \right\}, \forall \Delta_i \quad (12)$$

A condição de optimalidade implica a validade da hipótese de que a optimização global resulta da optimização em cada estágio. Na verdade, não pode haver outra forma de planear as tarefas de E_i com um custo inferior, senão seria possível diminuir o valor de $\Gamma(E_i)$ e dessa forma diminuir a soma, ou seja, diminuir o valor de $\Gamma(E_j)$.

A existência da relação de recorrência (12), que permite determinar a solução óptima, resulta de serem verificadas as condições de separabilidade e de optimalidade.

Exemplo:

Vamos considerar uma instância com 12 viagens, em que o tempo nominal de processamento de uma viagem é $p_j = 1$ viagem/u.t., $\forall j$. Os limites para a dimensão dos blocos são, respectivamente, $N_{min} = 3$ e $N_{max} = 4$. As datas disponibilidade dos camiões e as datas de entrega das viagens são as seguintes:

v_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_j	0	0	0	0	0	2	2	4	4	4	4	4
d_j	2	3	4	5	7	7	9	9	13	13	13	13

Vamos considerar que o sistema tem 5 cais, que existe apenas 1 pulmão, e que esse pulmão tinha sido preparado antes do início do plano. O sistema possui apenas um empilhador “transferência” que executa uma transferência pulmão-cais em 0.4 u.t..

As regras impostas ao funcionamento do sistema podem ser expressas através das seguintes restrições:

- a) A expressão que limita o número de viagens activas em cada bloco $N_{min} \leq |\Delta^{act}| \leq N_{max}$ condiciona o número conjunto de preparações em pulmão e movimentos buffer cais, ou seja, $3 \leq \alpha + \delta \leq 4$;
- b) Foi assumido que não era possível descarregar um pulmão e prepará-lo no mesmo bloco. No caso em análise, em que existe apenas 1 pulmão, essa restrição traduz-se em $\beta + \delta \leq 1$;
- c) O número de cais disponíveis limita o número de viagens que podem sair em cada bloco. Como $N_c = 5$, temos $|\Delta^{out}| \leq 5$, ou seja, $\alpha + \beta \leq 5$.

Estamos em condições de definir os estados possíveis com base na definição dos blocos possíveis. Cada bloco é definido por um tripleto (α, β, δ) obedecendo às restrições enunciadas. Dado haver apenas um pulmão, os estados são definidos por $(y_i, 0)$ ou $(y_i, 1)$. Para melhor especificar as transições possíveis, vamos analisar separadamente as decisões alternativas a partir de estados em que o pulmão está cheio e em que está vazio.

Vamos considerar em primeiro lugar um estado em que o pulmão está cheio, o que implica

que não é permitido fazer preparações em pulmão, ou seja, $\delta = 0$. As transições possíveis são as seguintes:

Estado inicial	(α, β, δ)	Estado final	Número viagens saídas	Duração do bloco
$(y_i, 1)$	$(3,0,0)$	$(y_i + 3, 1)$	3	3
$(y_i, 1)$	$(3,1,0)$	$(y_i + 4, 0)$	4	3
$(y_i, 1)$	$(4,0,0)$	$(y_i + 4, 1)$	4	4
$(y_i, 1)$	$(4,1,0)$	$(y_i + 5, 0)$	5	4

O primeiro caso corresponde a um bloco em que são preparadas 3 viagens por movimentos buffer-cais, mantendo-se a preparação em pulmão para uso posterior. O número de viagens saídas é incrementado de 3 unidades.

No segundo caso, a preparação existente em pulmão é utilizada, sendo a sua transferência feita no início do bloco. No mesmo bloco, saem também 3 viagens por movimentos buffer-cais. Estes dois casos são os únicos possíveis para um número de viagens activas igual a 3. O terceiro e o quarto casos correspondem a blocos em que o número de viagens activas é igual a 4.

Vamos agora considerar os estados em que o pulmão está vazio, o que implica que não é permitido fazer transferências pulmão-cais, ou seja, $\beta = 0$.

As transições possíveis são as seguintes:

Estado inicial	(α, β, δ)	Estado final	Número viagens saídas	Duração do bloco
$(y_i, 0)$	$(2,0,1)$	$(y_i + 2, 1)$	2	3
$(y_i, 0)$	$(3,0,0)$	$(y_i + 3, 0)$	3	3
$(y_i, 0)$	$(3,0,1)$	$(y_i + 3, 1)$	3	4
$(y_i, 0)$	$(4,0,0)$	$(y_i + 4, 0)$	4	4

No primeiro caso, o bloco tem 3 viagens activas, havendo 2 movimentos buffer-cais e uma preparação em pulmão. Na definição do estado final, os valores do número de viagens saídas e o número de preparações em pulmão são incrementados de acordo com essas actividades. No segundo caso, saem 3 viagens por movimentos buffer-cais. O terceiro e o quarto casos correspondem a blocos semelhantes, mas com 4 viagens activas.

Se não for tido em conta a restrição imposta pelo cumprimento da data de disponibilidade dos camiões e de acordo com a definição apresentada, os estados possíveis para esta instância são os apresentados de seguida:

Estágio 1	
Estado inicial	Estados atingidos
$(0,1)$	$(3,1)$ $(4,0)$ $(4,1)$ $(5,0)$

Estágio 2

Estado inicial	Estados atingidos
(3,1)	(6,1) (7,0) (7,1) (8,0)
(4,0)	(6,1) (7,0) (7,1) (8,0)
(4,1)	(7,1) (8,0) (8,1) (9,0)
(5,0)	(7,1) (8,0) (8,1) (9,0)

Estágio 3

Estado inicial	Estados atingidos
(6,1)	(9,1) (10,0) (10,1) (11,0)
(7,0)	(9,1) (10,0) (10,1) (11,0)
(7,1)	(10,1) (11,0) (11,1) (12,0)
(8,0)	(10,1) (11,0) (11,1) (12,0)
(8,1)	(11,1) (12,0) (12,1) (13,0)
(9,0)	(11,1) (12,0) (12,1) (13,0)

Só o estado (12,0) corresponde a um estado final válido, com um número final de viagens saídas igual a 12 e sem nenhuma preparação em pulmão. No Estágio 4, não há estágios de interesse para a definição do problema.

Se, por um lado, não considerarmos os estados que não conduzem a este estado final válido e, por outro lado, atendermos à restrição das datas de disponibilidade dos camiões obtém-se a rede apresentada na Figura 8. Os arcos representados correspondem às transições possíveis, e os valores que lhes estão associados traduzem a soma dos custos das demoras associadas à decisão. Os estados assinalados correspondem aos estados possíveis e têm valor finito; os seus valores óptimos são os apresentados na Figura 8. Aos restantes estados, está associado um valor $+\infty$.

Os tempos associados a cada estado, de acordo com a Equação (9), são os seguintes:

Estado	Tempo associado
(0,1)	0
(3,1)	3
(4,0)	3
(4,1)	4
(5,0)	4
(7,1)	7
(8,0)	7
(8,1)	8
(9,0)	8
(12,0)	11

O estado (4,0) tem o tempo associado 3 u.t.. A transição deste estado para o estado (8,0) implicaria a decisão de preparar 4 viagens, que inclui a preparação da viagem 8. Como esta viagem tem um instante de disponibilidade igual a 4, esta transição não é considerada.

A solução óptima corresponde a um plano em que é possível preparar todas as viagens sem atraso. Esta solução corresponde à seguinte transição de estados:

Estado origem	(α, β, δ)	Estado destino	Número viagens saídas	Duração do bloco
(0, 1)	(3,1,0)	(4, 0)	4	3
(4, 0)	(3,0,1)	(7, 1)	3	4
(7, 1)	(4,1,0)	(12, 0)	5	4

Os instantes de início de preparação, início de transferência, fim de preparação e fim de transferência são os seguintes:

v_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_j	0	0	0	0	0	2	2	4	4	4	4	4
s_j	-	0	0	0	3	3	3	3	7	7	7	7
st_j	0	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	-
Cp_j	-	3	3	3	7	7	7	7	11	11	11	11
C_j	0.4	3	3	3	7	7	7	7.4	11	11	11	11
d_j	2	3	4	5	7	7	9	9	13	13	13	13
D_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

□

5.2 Eficiência

A eficiência da metodologia proposta pode ser avaliada em termos da carga computacional. Na análise que se segue, é assumido que $n \gg N_p$ e $n \gg N_c$.

A carga computacional depende do número de estágios, do número de estados e do número de acções alternativas em cada estado no qual é avaliada a relação de recorrência, dada pela Equação (12). As acções alternativas em cada estado resultam das diferentes formas de dimensionamento dos blocos. A dimensão dos blocos deve ter um valor mínimo para permitir o funcionamento do sistema à taxa máxima. A dimensão máxima de um bloco é função do número de cais, do número de pulmões e do número de preparações disponíveis. Assim, num estado genérico $e_i = (y_i, z_i)$ há a considerar as acções alternativas $e_j = (y_i + \alpha + \beta, z_i - \beta + \delta)$, sendo necessário respeitar os seguintes limites:

- α – o número de operações (b-c) pode variar de 0 a N_c ;
- β – o número de transferências para cais pode variar de 0 até ao valor $\min(N_c, z_i)$;
- δ – o número de preparações em pulmão pode variar de 0 até ao valor $(N_p - z_i)$.

O número de acções alternativas possíveis é limitado superiormente por $N_c \times \min(N_c, z_i) \times (N_p - z_i)$. Tipicamente, nestes armazéns, o número de pulmões é superior ao número de cais, pelo que $\min(N_c, z_i) = N_c$. Assim, a ordem de grandeza do conjunto de acções alternativas, S , é $O(S) = O(N_c^2 \cdot N_p)$.

O número de estados possíveis para n viagens é da ordem $O(n \cdot N_p)$. Este valor resulta da análise aos valores máximos possíveis para cada elemento do par ordenado:

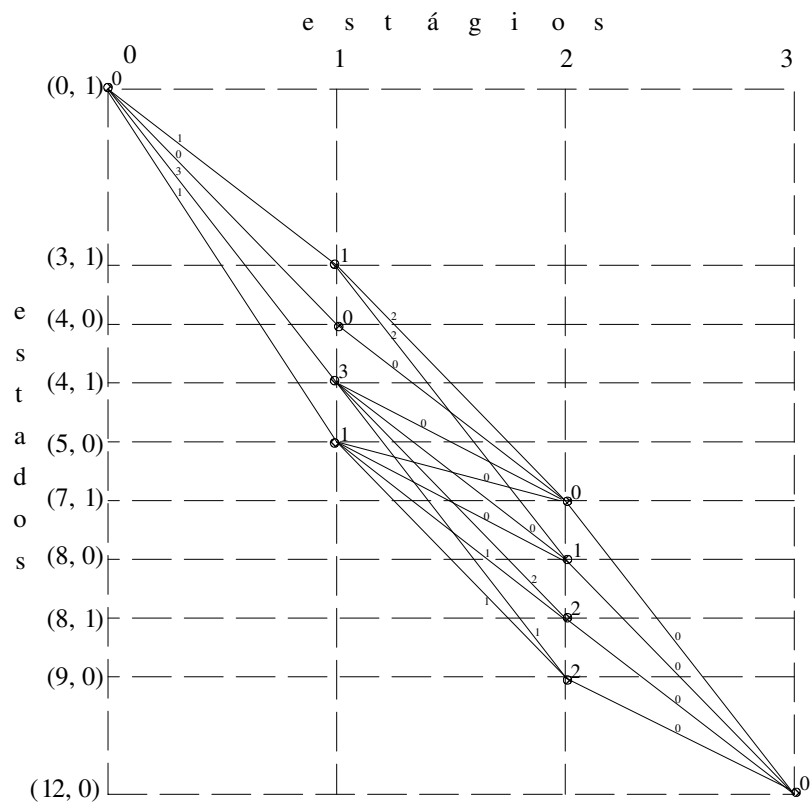


Figura 8: Enumeração das decisões alternativas

y_{\max} – o limite máximo é n , porque todas as viagens têm de ser expedidas quer por operações (b-c), quer por operações (p-c). No entanto a soma das duas parcelas não excede n ;

z_{\max} – o valor máximo para este parâmetro do par ordenado é dado pelo número de pulmões existentes, N_p .

O número máximo de estágios resulta da preparação das n viagens em blocos de dimensão mínima, $\frac{n}{N_{\min}}$, que é um valor de ordem $O(n)$.

A eficiência de um algoritmo de programação dinâmica é de ordem de grandeza do produto do número de estágios pelo número de estados e pelo número de alternativas [3]. Para o modelo em análise, a eficiência do algoritmo de programação dinâmica é $O(n) \cdot O(n \cdot N_p) \cdot O(N_c^2 \cdot N_p)$, ou simplificando, $O(n^2 \cdot N_c^2 \cdot N_p^2)$.

Tratando-se de um algoritmo polinomial, é possível estabelecer os valores máximos de tempo de computação para qualquer número de viagens. A resolução de uma instância de teste formada por 100 viagens demora 270 milissegundos numa máquina AMD K6 400 MHz.

6 Conclusão

Neste artigo, analisámos um sistema que assegura um fluxo constante, ao longo do tempo, de contribuições de processamento que são divididas equitativamente pelas tarefas activas. Isto dá origem a um problema com tarefas com um tempo de processamento variável, que depende do número de tarefas activas.

Quando se consideram datas de disponibilidade e datas de entrega, este problema pertence à classe de problemas NP-difíceis. Para obter soluções no caso em análise, foi adoptada uma heurística de solução baseada em programação dinâmica. Este estratégia permite obter um procedimento de $O(n^2 \cdot N_c^2 \cdot N_p^2)$.

Agradecimentos

Agradecemos aos Drs. Jorge Vieira e Eduardo Silvério da Efacec, Sistemas de Informação, S. A., a sua colaboração na definição e modelação deste problema.

Este trabalho foi realizado no âmbito de um projecto da Linha de Engenharia de Sistemas e de Processos Industriais do Centro Algoritmi.

Bibliografia

- [1] Blazewicz, J., Ecker, K., Pesch, E., Schmidt, G. and Weglarz, J. *Scheduling in Computer and Manufacturing Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] Elsayed, E. & Stern, R., Computerized algorithms for order processing in automated warehousing systems, *International Journal of Production Research* 21, 1983, 579-586.
- [3] French, S., *Sequencing and Scheduling: An Introduction to the Mathematics of the Job-Shop*, John Wiley, New York, 1982.

- [4] Gibson, D. e Sharp, G., Order batching procedures, *European Journal of Operational Research* 58, 1992, 57-67.
- [5] Rodrigues, A. *Investigação Operacional: Modelos Determinísticos*, Universidade do Minho, Braga, 1994.
- [6] Randhawa, S. e Shroff, R., Simulation-based design evaluation of unit automated storage/retrieval systems, *Computers and Industrial Engineering* 28, 1995, 71-79.
- [7] Valério de Carvalho, Carvalho e Oliveira, Programação de operações em sistemas com tempo de processamento variável, *Pesquisa Operativa*, 22, n.3, 2002.